Einführung in topologische Gruppen
Übungsblatt 10

Oliver Bräunling
Lukas Braun

Wir wollen auf diesem Blatt den folgenden Satz beweisen:

Satz 1 *Sei X ein eigentlicher metrischer Raum, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt und* $\mathrm{Isom}(X)$ *die Gruppe der bijektiven Isometrien $X \to X$. Dann ist* $\mathrm{Isom}(X)$ *eine lokalkompakte topologische Gruppe und erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom.*

Hierbei bedeutet eigentlich *für einen metrischen Raum, dass die abgeschlossenen Bälle $\overline{B_\epsilon(x)}$ kompakt sind. Ein topologischer Raum erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom, wenn er eine abzählbare Basis (äquivalent: Subbasis) der Topologie besitzt.*

Zuerst brauchen wir eine Topologie auf $\mathrm{Isom}(X)$.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Voraussetzungen wie in Satz 1. Wir definieren die *kompakt-abgeschlossene* Topologie auf $\mathrm{Isom}(X)$ über die Subbasis von Mengen

$$\mathcal{O}_{K,V} := \{f \in \mathrm{Isom}(X) \mid f(K) \subseteq V\}$$

mit K kompakt und V offen. Wir definieren die *punktweise Topologie* auf $\mathrm{Isom}(X)$ über die Subbasis von Mengen

$$\mathcal{O}_{x,V} := \{f \in \mathrm{Isom}(X) \mid f(x) \subseteq V\}$$

mit $x \in X$ und V offen. Wir definieren die *Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Teilmengen*, kurz *ucc-Topologie*, auf $\mathrm{Isom}(X)$ über die Subbasis von Mengen

$$\mathcal{O}_{f_0,K,\epsilon} := \{f \in \mathrm{Isom}(X) \mid \sup_{x\in K} d_X(f_0(x), f(x)) < \epsilon\}$$

mit $f_0 \in \mathrm{Isom}(X)$, K kompakt und $\epsilon > 0$. Zeigen Sie: Alle drei Topologien sind äquivalent.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass $\mathrm{Isom}(X)$ mit der Topologie aus Aufgabe 1 eine topologische Gruppe ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die so definierte topologische Gruppe $\mathrm{Isom}(X)$ das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Betrachten Sie dazu die kompakt-abgeschlossene Topologie und finden Sie eine entsprechende abzählbare Subbasis.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei X nun kompakt. Finden Sie eine Metrik auf $\mathrm{Isom}(X)$. Zeigen Sie, dass die induzierte Topologie äquivalent ist zu den Topologien aus Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Isom}(X)$ mit dieser Topologie kompakt ist. Hinweis: zeigen Sie, dass eine Folge von Isometrien gleichmäßig stetig und beschränkt ist, dann können Sie den Satz von Arzelà-Ascoli anwenden und erhalten so eine konvergente Teilfolge. Sie müssen noch zeigen, dass der Limes eine Isometrie ist.

Abgabe am 28.01.2020, Postfach Braun.