SEMINAR INVARIANTENTHEORIE UND GRÖBNERBASEN PROGRAMM WS 2020/21

PROF. DR. ANNETTE HUBER-KLAWITTER, DR. LUKAS BRAUN

1. Polynomdivision in mehreren Variablen

Polynomdivision und euklidischer Algorithmus im euklidischen Ring $k[X]$, [DC15, Kapitel 1.5] und Anwendungen, Verallgemeinerungen, Problemstellungen [DC15, Kapitel 2.1]. Monomordnungen: Definition, wichtige Beispiele [DC15, Kapitel 2.2]. Polynomdivision in mehreren Variablen: Theorem 3 in [DC15, Kapitel 2.3] Probleme im Vergleich zum Fall $k[X]$ [DC15, Kapitel 2.3].

2. Monomiale Ideale, Hilbertscher Basissatz, Gröbnerbasen

Monomiale Ideale und Dicksons Lemma [DC15, Kapitel 2.4]. Hilbertscher Basissatz, der Beweis führt natürlicherweise zum Begriff (und Existenz) der Gröbnerbasen. Beispiele für Gröbnerbasen, Teilerkettensatz (ACC - ascending chain condition) [DC15, Kapitel 2.5].

3. Buchberger-Algorithmus

Eigenschaften von Gröbnerbasen, S-Polynome, Buchberger-Kriterium [DC15, Kapitel 2.6]. Buchberger-Algorithmus, minimale und reduzierte Gröbnerbasen [DC15, Kapitel 2.6]. Anwendungen: Idealgleichheit und Idealzugehörigkeit [DC15, Kapitel 2.6, 2.7].

4. Hilbertscher Nullstellensatz via Gröbnerbasen

Standard- und lcm-Darstellungen von S-Polynomen [DC15, Kapitel 2.9]. Schwacher Nullstellensatz mit Beweis via Gröbnerbasen [DC15, Kapitel 4.1, Thm. 1]. Konsistenzproblem, Konsistenzalgorithmus [DC15, Kapitel 4.1]. Aussage Nullstellensatz, starker Nullstellensatz [DC15, Kapitel 4.1, Thm. 2; Kapitel 4.2, Thm. 6].

5. Algebraische Gruppen

Definition algebraische Gruppe, Zusammenhangskomponenten, Zentrum, Gruppenhomomorphismen, Kommutatorgruppe [Kra84, Kapitel II.1.1-II.1.2]. Klassische algebraische Gruppen [Kra84, Kapitel II.1.3]. Liealgebren algebraischer Gruppen [Kra84, Kapitel II.1.4]. Die Liealgebren der klassischen Gruppen [Kra84, Kapitel II.1.5].

6. Gruppenoperationen und lineare Darstellungen

G-Varietäten, Fixpunkte, Bahnen, Stabilisatoren [Kra84, Kapitel II.2.1-II.2.2]. Lineare Darstellungen, G-Moduln, halbeinfache Moduln, reguläre Darstellungen [Kra84, Kapitel II.2.3-II.2.4]. Insbesondere Satz 2 in [Kra84, Kapitel II.2.4].

7. Quotienten nach linear reduktiven Gruppen

Lineare Reduktivität, isotypische Zerlegung, reguläre Darstellung [Kra84, Kapitel II.3.1]. Hilberts Endlichkeitssatz für reduktive Gruppen, Trennungseigenschaft, G-Abgeschlossenheit der Quotientenabbildung [Kra84, Kapitel II.3.2]. Beispiele aus [Kra84, Kapitel II.3.3]. Quotientenkriterium [Kra84, Kapitel II.3.4].

8. Invarianten von endlichen Gruppen I: Noethers Endlichkeitssatz, Molienreihen, Cohen-Macaulay-Eigenschaft

Noethers effektiver Endlichkeitssatz für endliche Gruppen [Stu08, Thm. 2.1.4]. Moliens Theorem [Stu08, Thm. 2.2.1]. Beispiel 2.2.4 in [Stu08]. Abschnitt [Stu08, 2.2] bis Beispiel 2.2.6. Cohen-Macaulay-Eigenschaft (von Invariantenringen), Hilbert-/Molien-Reihen, Hironaka-Zerlegung [Stu08, Abschnitt 2.3].

9. Invarianten von endlichen Gruppen II: Algorithmen und Gröbnerbasen

Gröbnerbasis-Algorithmen 2.5.1 bis 2.5.6 in [Stu08]. Algorithmen 2.5.8 und 2.5.14 in [Stu08] zur Berechnung von Erzeugern des Invariantenrings, Diskussion. Berechnung von symmetrieerhaltenden Gröbnerbasen, Bilder von affinen Varietäten unter endlichen Gruppenwirkungen [Stu08, Abschnitt 2.6].

10. Invarianten von Spiegelungsgruppen und abelschen Gruppen

Aussage und Beweis des Shepard-Todd-Chevalley Theorems für Spiegelungsgruppen [Stu08, Abschnitt 2.4]. Invarianten von endlichen abelschen Gruppen [Stu08, Abschnitt 2.7] bis Korollar 2.7.4. Invarianten von algebraischen Tori [Stu08, Abschnitt 1.4].

11. Die Fundamentalsätze für SL_n

Beispiele aus projektiver Geometrie, Van der Waerden Syzygien, Klammeralgebra, Gröbner Basis (Zweiter Fundamentalsatz) für die Grassmannvarietät [Stu08, Abschnitt 3.1]. Erster Fundamentalsatz für SL_n und Algorithmus 3.2.8 [Stu08, Abschnitt 3.2].

12. Die Grassmann-Cayley-Algebra und Projektive Geometrie

Grassmann-Cayley-Algebra, *join* und *meet*, geometrische Interpretation, Übersetzung(salgorithmus) in Klammerausdrücke, Beispiel: Theorem von Desargues [Stu08, Abschnitt 3.3]. Anwendungen in projektiver Geometrie, Theorem von Pascal etc. [Stu08, Abschnitt 3.4].

13. Cayley-Faktorisierung und Invarianten von Binären Formen

Cayley-Faktorisierungsproblem - Übersetzung von Klammerausdrücken in Grassmann-Cayley-Algebra-Ausdrücke. Theoretische Aussage [Stu08, Thm. 3.5.2] und Algorithmen [Stu08, Abschnitt 3.5]. Binäre Formen, Invarianten und Kovarianten, geometrische Interpretation anhand von Beispielen [Stu08, Abschnitt 3.6]. Theorem 3.6.6. und folgende Beispiele.

References

[Kra84] Hanspeter Kraft, *Geometrische Methoden in der Invariantentheorie*, Aspects of Mathematics, Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1984. ↑1, 2

[Stu08] Bernd Sturmfels, *Algorithms in invariant theory*, Second Edition, Texts and Monographs in Symbolic Computation, SpringerWienNewYork, Vienna, 2008. ↑2

[DC15] John Little David Cox and Donal O'Shea, *Ideals, varieties, and algorithms*, Fourth, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, Cham, 2015. An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra. ↑1

Mathematisches Institut, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg, Ernst-Zermelo-Strasse 1, 79104 Freiburg im Breisgau, Germany
E-mail address: lukas.braun@math.uni-freiburg.de