

Aufgabe 10.1. Man zeige aus den Eigenschaften, dass in \mathbb{R} eine Zahl genau dann größer gleich Null ist, wenn sie eine Quadratzahl ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 10.2. Sei K ein Körper, der als Körper total geordnet werden kann. Das heißt, man kann eine totale Ordnung \leq auf der Menge K definieren, so dass für alle $a, b, c \in K$ die folgenden Axiome gelten:

- Aus $a \leq b$ folgt $a + c \leq b + c$.
- Aus $0 \leq a$ und $0 \leq b$ folgt $0 \leq ab$.

Zeigen Sie: Dann hat K Charakteristik 0.

(4 Punkte)

Aufgabe 10.3. Bestimmen Sie alle Einbettungen des Körpers $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ in \mathbb{R} .

(2 Punkte)

Aufgabe 10.4. Sei K ein Körper mit $\text{Char } K = p > 0$. Man zerlege $X^p - 1$ in irreduziblen Faktoren in $K[X]$.

(2 Punkte)

Aufgabe 10.5. Sei $a \in \mathbb{Q}$.

- (a) Zeigen Sie: Das Polynom $X^3 - a$ hat eine Nullstelle in \mathbb{R} .
- (b) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ eine reelle Nullstelle des Polynoms $X^3 - a$. Bestimmen Sie alle Einbettungen des Körpers $\mathbb{Q}(\alpha)$ in \mathbb{R} .

(4 Bonus-Punkte)