Aufgabe 12.1. Man überlege, ob folgende Polynome separabel sind:

(a) Das Polynom $X^3 + 4X^2 - 5$ über $\mathbb{Q}$.

(b) Das Polynom $X^5 - t$ über $\mathbb{F}_5(t)$.

(c) Das Polynom $X^5 - t$ über $\mathbb{Q}(t)$.

(d) Das Polynom $6X^7 - \pi X^4 + 3X - 1$ über $\mathbb{R}$.

(e) Das Polynom $X^3 + 2iX + 5$ über $\mathbb{C}$.

(f) Das Polynom $X^5 - 1$ über $\mathbb{F}_5$.

(4 Punkte)

Aufgabe 12.2. Sei K ein Körper und L/K eine algebraische Körpererweiterung. Man zeige, dass die über K separablen Elemente von L einen Zwischenkörper von L/K bilden.

(4 Punkte)

Aufgabe 12.3. Sei K der Zerfällungskörper von $X^3 - 12$ über $\mathbb{Q}$. Berechnen Sie die Galois-Gruppe der Körpererweiterung $K/\mathbb{Q}$, indem Sie zeigen, dass sie isomorph zu einer Gruppe, die in der Vorlesung schon vorgekommen ist. Ist diese Körpererweiterung galois?

(6 Punkte)

Aufgabe 12.4. Sei k ein Körper und seien $r_1, \ldots, r_n$ Unbestimmte. Man betrachte den Quotientenkörper $L := k(r_1, \ldots, r_n)$ des Polynomrings $k[r_1, \ldots, r_n]$, dessen Elementen Brüche der Form f/g für $f, g \in k[r_1, \ldots, r_n]$ und $g \neq 0$ sind. Jede Permutation $\sigma \in S_n$ definiert einen Automorphismus von L, indem man σ auf die Unbestimmte $r_1, \ldots, r_n$ anwendet:

$$\frac{f(r_1, \ldots, r_n)}{g(r_1, \ldots, r_n)} \longmapsto \frac{f(r_{\sigma(1)}, \ldots, r_{\sigma(n)})}{g(r_{\sigma(1)}, \ldots, r_{\sigma(n)})}.$$

Sei $K = L^{S_n}$ der zugehörige Fixkörper und sei

$$P = \prod_{i=1}^{n} (X - r_i) = \sum_{j=0}^{n} a_j X^{n-j} \in L[X].$$

Zu zeigen:

(Bitte wenden)

(a) L/K ist galois mit Galois-Gruppe S_n.

(b) Es gelten folgende Formeln für die Koeffizienten von P:

$$\begin{aligned}
a_0 &= 1, \\
a_1 &= -(r_1 + \cdots + r_n), \\
a_2 &= r_1 r_2 + r_1 r_3 + \cdots + r_{n-1} r_n, \\
&\vdots \\
a_n &= (-1)^n r_1 \cdots r_n.
\end{aligned}$$

Insbesondere ist $P \in K[X]$.

(c) L ist der Zerfällungskörper von P über K.

(6 Punkte)

(d) Die Elemente $a_1, \dots, a_n \in K$ sind algebraisch unabhängig über k. Daher ist $K = k(a_1, \dots, a_n)$ der Quotientenkörper des Polynomrings $k[a_1, \dots, a_n]$.

(3 Bonus-Punkte)

Aufgabe 12.5. Finden Sie eine Galoiserweiterung von $\mathbb{Q}$, deren Galois-Gruppe isomorph zur Kleinsche Vierergruppe ist. Beweisen Sie Ihre Behauptung.

(4 Bonus-Punkte)