Aufgabe 2.1. Sei $H \subset G$ eine Untegruppe. Man zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) Für alle $g \in G$ gilt $Hg = gH$.

(b) Für alle $g \in G$ gilt $g^{-1}Hg = H$.

(c) Für alle $g \in G$ gilt $g^{-1}Hg \subset H$.

(d) Für alle $g_1, g_2 \in G$ gilt $g_1 g_2 \in H$ genau dann, wenn $g_2 g_1 \in H$.

Sie können gerne versuchen, Ihren Beweis zu dieser Aufabe mit Lean zu überprüfen. Hinweise dazu finden Sie am Ende dieses Übungsblattes.

(4 Punkte)

Aufgabe 2.2. Sei $\mathbb{Q}$ der Körper der rationalen Zahlen und sei

$$M := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{Q} \right\} \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$$

die Untegruppe, die in Aufgabe 1.4 eingeführt wurde. Sei

$$D := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{Q} \text{ und } ac \neq 0 \right\} \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$$

die Teilmenge der invertierbaren oberen Dreiecksmatrizen. Sie dürfen ohne Nachweis verwenden, dass $M \subset D$ und $D \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ Untergruppen sind.

(a) Ist M ein Normalteiler von D?

(b) Ist D ein Normalteiler von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$?

(c) Ist M ein Normalteiler von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$?

(6 Punkte)

Aufgabe 2.3. Sei G eine Gruppe und $H \subset G$ eine Untergruppe von Index 2. Man zeige, dass H ein Normalteiler ist.

(4 Punkte)

(Bitte wenden)

Aufgabe 2.4. Es seien N und H Gruppen und $\varphi\colon H \to \mathrm{Aut}(N)$ ein Gruppenhomomorphismus. Sei $G := N \times H$ das kartesische Produkt von N und H als Menge betrachtet.

(a) Sei $*\colon G \times G \to G$ die Abbildung, die durch

$$(n_1, h_1) * (n_2, h_2) := (n_1\varphi(h_1)(n_2), h_1h_2)$$

definiert ist. Man zeige, dass $(G, *)$ eine Gruppe ist.

(b) Man zeige, dass N und H Untergruppen von G sind. Genauer, dass es einen Gruppenisomorphismus von N (bzw. H) auf eine Untergruppe von G gibt.

(c) Man zeige, dass N ein Normalteiler von G ist.

(d) Man gebe einen Beispiel, in dem H nicht ein Normalteiler von G ist.

(e) Man zeige, dass $G/N \cong H$ ist.

Die Gruppe $(G, *)$ wird *semidirektes Produkt von N und H mittels φ* gennant, und als $N \rtimes_\varphi H$ notiert.

(6 Punkte)

Hinweise zu Lean

```
import group_theory.subgroup.basic
variables {G : Type} [group G] (N : subgroup G)
def normal_a : Prop := ∀ g : G, ∀ h : N, ∃ h' : N, ↑h * g = g * h'
def normal_b : Prop := ∀ g : G, (∀ h : N, ∃ h' : N, g⁻¹ * h * g = h') ∧
    (∀ h : N, ∃ h' : N, ↑h = g⁻¹ * h' * g)
def normal_c : Prop := ∀ g : G, ∀ h : N, ∃ h' : N, g⁻¹ * h * g = h'
def normal_d : Prop := ∀ g₁ g₂ : G, (∃ h : N, g₁ * g₂ = h) ↔ (∃ h : N, g₂ *
     g₁ = h)
lemma a_implies_b : normal_a N → normal_b N :=
begin
  intro assumpt,
  unfold normal_a at assumpt,
  unfold normal_b,
  sorry, -- Erase sorry and replace it with your own proof!
end
```

Vielleicht finden Sie die mathlib documentation für subgroup hilfreich. Die Pfeile `↑ h` würden Sie auch irgendwo im tutorials project treffen. Bei konkreten Fragen können Sie mir gerne eine E-Mail schreiben (pedro.nunez@math.uni-freiburg.de).