Algebra und Zahlentheorie WS21/22 — Übungsblatt 4
Prof. Dr. Annette Huber-Klawitter
Dr. Andreas Demleitner und M.Sc. Pedro Núñez — Abgabe: 15.11.2021

Aufgabe 4.1. Es seien n und $m \neq 0$ zwei natürliche Zahlen. Dann existieren eindeutig bestimmte natürliche Zahlen a und b, sodass $n = am + b$ und $b < m$.

Sie können gerne versuchen, Ihren Beweis zu dieser Aufgabe mit Lean zu überprüfen. Vielleicht finden Sie The Natural Number Game dafür hilfreich.

(4 Punkte)

Aufgabe 4.2. Man betrachte die Menge $M := \{m \in \mathbb{N} \mid m \leq 14306\}$.

(a) Zeigen Sie: Es gibt eine einzige Zahl $l \in M$, sodass

$$l \equiv 27 \pmod{57} \quad \text{und} \quad l \equiv 92 \pmod{251}.$$

(2 Punkte)

(b) Berechnen Sie die Zahl l. Geben Sie den Rechenweg und gegebenenfalls eine Quelle, die Sie benutzt haben, an.

(4 Bonus-Punkte)

Aufgabe 4.3. Man beweise folgende Verallgemeinung des Chinesischen Restsatzes. Seien $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ paarweise teilerfremd und sei $n = n_1 \cdots n_k$. Dann gilt

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/n_k\mathbb{Z}.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 4.4. Stellen Sie die folgenden Elemente von S_6 als Produkt disjunkter Zykel dar. Sie müssen dabei keine Rechenwege angeben.

(a) $(12)(23)(34)$
(b) $(12)(13)(14)$
(c) $(12)(34)(56)$
(d) $(123)(5623)(146)$
(e) $(135)^{-1}$
(f) $(1234)(12)((1234)^{-1})$

(6 Punkte)