Aufgabe 6.1. Sei A ein Ring und seien $I, J \subset A$ Ideale von A. Man zeige, dass folgende Teilmengen auch Ideale von A sind:

(a) $I + J := \{a + b \mid a \in I, b \in J\}$.

(b) $IJ := \{\sum_{i=1}^{l} a_i b_i \mid l \in \mathbb{N}, a_i \in I \text{ für jedes } i, b_i \in J \text{ für jedes } i\}$.

(c) $I \cap J$.

Man rechne dann einzelne Erzeuger für folgende Ideale von $\mathbb{Z}$:

(d) $(4) + (6)$.

(e) $(4)(6)$.

(f) $(4) \cap (6)$.

(6 Punkte)

Aufgabe 6.2. Bestimmen Sie alle Ideale in $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ und in dem Ring

$$\mathbb{Z}_{(2)} = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \text{ ungerade} \right\}.$$

Handelt es sich um Hauptidealringe?

(5 Punkte)

Aufgabe 6.3. Sei A ein Ring und G eine endliche Gruppe. Sei $A[G]$ die Menge der formalen Summen $\sum_{g \in G} a_g g$, wobei $a_g \in A$ für jedes $g \in G$.

(a) Man definiere zwei Verknüpfungen $+, \cdot \colon A[G] \times A[G] \to A[G]$, so dass $(A[G], +, \cdot)$ ein (nicht notwendig kommutativer) Ring ist.

(b) Unter welcher Voraussetzung ist $A[G]$ kommutativ?

(4 Punkte)

Aufgabe 6.4. Sei A ein Ring. Ein Element $a \in A$ heißt *nilpotent*, wenn es ein $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gibt, so dass $a^n = 0$ ist. Man zeige, dass die Menge aller nilpotente Elemente aus A ein Ideal ist.

Sie können gerne versuchen, Ihren Beweis zu dieser Aufgabe mit Lean zu überprüfen. Hinweise dazu finden Sie am Ende dieses Übungsblattes.

(4 Punkte)

(Bitte wenden)

Aufgabe 6.5. Wir haben schon mehrmals folgende Situation getroffen: Wir definieren eine besondere Art von Objekten (Gruppen, Vektorräume...) und wir betrachten dann Abbildungen zwischen solchen Objekten, die die Struktur der Objekten respektieren (Gruppenhomomorphismen, lineare Abbildungen...). In dieser Situation sprechen wir von *Kategorien*: die Kategorie der Gruppen, die Kategorie der Vektorräume über einen Körper, usw. Ringe und Ringhomomorphismen bilden auch eine Kategorie.

Eine Abbildung $i\colon A \to B$ in einer Kategorie heißt *Monomorphismus*, wenn gilt: Für alle T und alle $f, g\colon T \to A$ in der Kategorie, so dass $i \circ f = i \circ g$, gilt $f = g$.

Eine Abbildung $p\colon A \to B$ in einer Kategorie heißt *Epimorphismus*, wenn gilt: Für alle T und alle $f, g\colon B \to T$ in der Kategorie, so dass $f \circ p = g \circ p$, gilt $f = g$.

Sei K ein Körper.

(a) Zeigen Sie, dass eine K-lineare Abbildung genau dann ein Monomorphismus ist, wenn sie injektiv ist. Tipp: Ein interessantes Testobjekt ist $T = \mathrm{Ker}(i)$ mit f die Inklusion und g die Nullabbildung.

(b) Zeigen Sie, dass eine K-lineare Abbildung genau dann ein Epimorphismus ist, wenn sie surjektiv ist. Tipp: Ein interessantes Testobjekt ist $T = B/\,\mathrm{Bild}(p)$.

(c) Sei $i\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ das einzige Ringhomomorphismus von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Q}$, also die Inklusion. Zeigen Sie, dass i ein Mono- und ein Epimorphismus ist.

Man denkt intuitiv von Monomorphismen als injektiven Abbildungen und von Epimorphismen als surjektiven Abbildungen, was auch der Fall in der Kategorien der Gruppen oder der Vektorräume ist. Insbesonders ist Monomorphismus + Epimorphismus = Isomorphismus in diesen Kategorien. Also diese Aussage gilt nicht in der Kategorie der Ringe, wie Teil (c) zeigt.

(9 Bonus-Punkte)

Hinweise zu Lean

```
import ring_theory.ideal.basic
import ring_theory.nilpotent
variables (R : Type) [comm_ring R]
namespace ideal
def nilradical : ideal R :=
{ carrier := {x : R | is_nilpotent x},
  zero_mem' :=
  begin
    simp,
    sorry -- Contains the zero element?
  end,
  add_mem' :=
  begin
    sorry -- Closed under addition?
  end,
  smul_mem' :=
  begin
    sorry -- Closed under product by elements of the ring?
  end }
end ideal
```