Aufgabe 8.1. Man zeige, dass folgende Polynome irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$ sind:

(a) $X^2 - 2$.

(b) $X^3 + 125X^2 + 3X - 5$.

(c) $X^8 - 57X^5 + 19$.

(d) $5X^4 - 12X^3 + 9X^2 + 3$.

(e) $X^{11} - 121X^5 + 22X^4 + 21$.

(6 Punkte)

Aufgabe 8.2. Sei $P \in \mathbb{Z}[X]$ ein normiertes Polynom und $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Sei $\bar{P}$ das Bild von P in $\mathbb{F}_p[X]$. Das heißt, wenn $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ ist, dann ist $\bar{P} = \sum_{i=0}^n \bar{a}_i X^i$, wobei $\bar{a}_i = a_i + p\mathbb{Z}$ für alle $i \in \{0, \ldots, n\}$ ist. Zeigen Sie:

(a) Wenn $\bar{P}$ irreduzibel in $\mathbb{F}_p[X]$ ist, dann ist P auch in $\mathbb{Z}[X]$ irreduzibel.

(b) Wenn $\bar{P}$ irreduzibel in $\mathbb{F}_p[X]$ ist, dann ist P auch in $\mathbb{Q}[X]$ irreduzibel.

(c) Wenn P vom Grad 2 oder 3 ist und wenn es kein $\alpha \in \mathbb{F}_p$ gibt, so dass $P(\alpha) = 0$ in $\mathbb{F}_p$, dann ist P irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$.

(d) Das Polynom $P = X^3 + 3X^2 - 4X - 1$ ist irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$.

(4 Punkte)

Aufgabe 8.3. Sei K ein Körper. Zeigen Sie:

(a) Sei $a \in K$. Dann ist $\mathrm{ev}_a \colon K[X] \to K, P \mapsto P(a)$ ein Ringhomomorphismus.

(b) Sei $\mathrm{Abb}(K, K)$ der Ring der Abbildungen von K auf sich selbst mit dem Produkt $(fg)(a) = f(a)g(a)$. Dann ist $\varphi \colon K[X] \to \mathrm{Abb}(K, K), P \mapsto (a \mapsto P(a))$ ein Ringhomomorphismus.

(c) Wann ist φ injektiv?

(6 Punkte)

(Bitte wenden)

Aufgabe 8.4. Man berechne die Grade folgender Körpererweiterungen:

(a) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$.

(b) $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ mit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ so dass $\alpha^7 = 1$.

(c) $\mathbb{F}_3(\alpha)/\mathbb{F}_3$ mit $\alpha^3 - \alpha - 1 = 0$.

(d) $\mathbb{Q}(\alpha, \beta)/\mathbb{Q}$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ so dass $\alpha^2 = \beta^3 = 2$.

(6 Punkte)