Aufgabe 9.1. Man berechne den Grad der Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ mit $\alpha \in \mathbb{C}$ so dass $\alpha^4 = 2$ und das Minimalpolynom von α über $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

(4 Punkte)

Aufgabe 9.2. Sei K ein Körper und L/K eine endliche Körpererweiterung, so dass $p = [L : K]$ eine Primzahl ist. Man zeige: Es existiert ein $\alpha \in L$ mit $L = K(\alpha)$.

(4 Punkte)

Aufgabe 9.3. Man zeige, dass die Körpererweiterung $\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$ nicht endlich ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 9.4. Sei L/K eine endliche Körpererweiterung und sei $\alpha \in L$. Sei

$$\varphi_\alpha \colon L \to L, x \mapsto \alpha x.$$

Sie dürfen ohne Nachweis benutzen, dass φ_α eine K-lineare Abbildung ist. Sei $P_\alpha \in K[X]$ das charakteristische Polynom von φ_α und $\mathrm{Min}(\alpha) \in K[X]$ das Minimalpolynom von α.

(a) Man zeige, dass $P_\alpha(\alpha) = 0$.

(4 Punkte)

(b) Man zeige, dass $P_\alpha = \pm \mathrm{Min}(\alpha)$, wenn $L = K(\alpha)$. Im allgemeinem gilt: P_α ist eine Potenz von $\mathrm{Min}(\alpha)$.

(4 Bonus-Punkte)