Alle Punkte in diesem Übungsblatt sind Bonus-Punkte und man kann maximal 20 Punkte erhalten. Die Tutoren müssen nur so viel korrigieren, bis 20 Punkte erreicht wurden. Viel Spaß!

Notwendige Aufgaben

Wir glauben, dass folgende Aufgaben lösen zu können eine *notwendige Bedingung* ist, um die Klausur zu bestehen. Diese Aufgaben sind unser Meinung nach auch relativ einfach, im Vergleich zu einer typischen Aufgabe dieser Vorlesung.

Aufgabe B.1. Es sei G eine Gruppe und $g, g_1, g_2 \in G$ Elemente, so dass $gg_1 = gg_2$ gilt. Dann ist $g_1 = g_2$.

(1 Punkt)

Aufgabe B.2. Es sei G eine abelsche Gruppe und $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $f_n \colon G \to G, g \mapsto g^n$ ein Gruppenhomomorphismus.

(1 Punkt)

Aufgabe B.3. Sei G eine Gruppe und sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl, so dass $|G| = p$. Sei $g \in G$ ein Element mit $g^m = e$ für eine natürliche Zahl $m < p$. Dann ist $g = e$.

(2 Punkte)

Aufgabe B.4. Es seien G und H zwei Gruppen. Man zeige, dass $G \triangleleft G \times H$ ein Normalteiler ist, und dass $G \times H/G \cong H$ ist.

(2 Punkte)

Aufgabe B.5. Man berechne die Einheiten im Ring $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$.

(2 Punkte)

Aufgabe B.6. Man schreibe folgende Permutation als Produkt disjunkter Zykel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 5 & 4 & 7 & 8 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(1 Punkt)

Aufgabe B.7. Sei M eine endliche Menge und G eine endliche Gruppe, die auf M operiert. Wenn die Operation transitiv und frei ist (das heißt, wenn es genau eine Bahn gibt und wenn alle Standgruppen trivial sind), dann ist $|M| = |G|$.

(2 Punkte)

Aufgabe B.8. Sei A ein Ring und $I \subset A$ ein Ideal, das eine Einheit von A enthält. Dann ist $I = A$.

(2 Punkte)

Aufgabe B.9. Ein Ring A heißt *Integritätsbereich*, falls $A \neq 0$ und folgende Eigenschaft gilt: Falls $ab = 0$ in A, dann ist $a = 0$ oder $b = 0$. Sei A ein Integritätsbereich. Es seien weiter $a, b, c \in A$, so dass $ab = ac$ in A und $a \neq 0$. Dann ist $b = c$ in A.

(2 Punkte)

Aufgabe B.10. Sei k ein Körper und $P \in k[X]$ ein Polynom vom Grad 5. Man zeige, dass jede Äquivalenzklasse in $k[X]/(P)$ einen Polynom vom Grad < 5 enthält.

(2 Punkte)

Aufgabe B.11. Sei $P = 10^{2021}X^3 + X - 1 \in \mathbb{R}[X]$. Ist P irreduzibel in $\mathbb{R}[X]$?

(2 Punkte)

Aufgabe B.12. Sei $P = X^7 - 10X^4 + 42X - 6 \in \mathbb{Q}[X]$. Ist P irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$?

(1 Punkt)

Aufgabe B.13. Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $\alpha^5 = 1$ und $\alpha \neq 1$. Was ist $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$?

(1 Punkt)

Aufgabe B.14. Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $\alpha^3 = 2$. Was ist $[\mathbb{Q}(i, \alpha) : \mathbb{Q}]$?

(2 Punkte)

Aufgabe B.15. Man beweise folgende Kürzungsregel für die Addition in $\mathbb{N}$:

$$a + c = b + c \Rightarrow a = b.$$

(2 Punkte)

Hinreichende Aufgaben

Wir glauben, dass folgende Aufgaben (plus die notwendige Aufgaben) lösen zu können eine *hinreichende Bedingung* ist, um die Klausur zu bestehen. Diese Aufgaben sind unser Meinung nach weder zu schwierig, noch zu einfach, im Vergleich zu einer typischen Aufgabe diseser Vorlesung.

Aufgabe B.16. Es sei G eine Gruppe. Für alle $g \in G$ gelte $g^2 = 1$. Man zeige, dass G abelsch ist.

(3 Punkte)

Aufgabe B.17. Es sei $f\colon G \to G'$ ein Gruppenhomomorphismus und es sei $H' \subset G'$ eine Untergruppe (bzw. Normalteiler) in G'. Dann ist $f^{-1}(H') \subset G$ auch eine Untergruppe (bzw. Normalteiler).

(3 Punkte)

Aufgabe B.18. Sei H die Untegruppe $\{(1), (12)\}$ von S_3. Man zeige, dass es keinen Gruppenhomomorphismus $f\colon S_3 \to G$ gibt, so dass $H = \mathrm{Ker}(f)$.

(3 Punkte)

Aufgabe B.19. Was ist die kleinste nicht abelsche Gruppe?

(3 Punkte)

Aufgabe B.20. Man male ein Diagramm mit allen Untergruppen von S_4, und man markiere darin die Normalteiler.

(3 Punkte)

Aufgabe B.21. Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{ggT}(n, 35) = 1$. Dann ist $n^{12} \equiv 1 \pmod{35}$.

(4 Punkte)

Aufgabe B.22. Sei $f\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus (von Ringen mit 1). Zeigen Sie, dass $f(A^\times) \subset B^\times$ gilt.

(3 Punkte)

Aufgabe B.23. Sei A ein Ring. Sei $B \subset A$ ein Unterring und $I \subset A$ ein Ideal. Dann ist $B + I = \{b + i \mid b \in B, i \in I\}$ ein Unterring von A und $B \cap I$ ein Ideal von B. Man zeige, dass es einen Ringisomorphismus

$$B/(B \cap I) \cong (B + I)/I$$

gibt. Man erhalte als Korollar die Existenz eines Ringisomorphismus

$$\mathbb{F}_3 \cong \mathbb{Z}[X]/(3, X).$$

(4 Punkte)

Aufgabe B.24. Sei A ein Ring. Ein Ideal $I \subset A$ heißt *prim*, falls $I \neq A$ und folgender Eigenschaft gilt: Falls $ab \in I$, dann ist $a \in I$ oder $b \in I$. Man zeige, dass I genau dann prim ist, wenn A/I ein Integritätsbereich ist (siehe Aufgabe B.9).

(3 Punkte)

Aufgabe B.25. Sei A ein Ring und $I \neq A$ ein Ideal in A, so dass $A \setminus I \subset A^\times$. Dann ist I das einzige maximal Ideal von A.

(3 Punkte)

Aufgabe B.26. Sei A ein Hauptidealring und $a, b \in A \setminus \{0\}$. Wir definieren $\mathrm{ggT}(a, b)$ als ein Element $d \in A$, so dass $d \mid a$, $d \mid b$ und $c \mid d$ für alle $c \in A$ mit $c \mid a$ und $c \mid b$. Also $\mathrm{ggT}(a, b)$ ist nur bis auf Einheit $u \in A^\times$ eindeutig definiert.

(a) Es gilt $(\mathrm{ggT}(a, b)) = (a, b)$.

(b) Es gibt $s, t \in A$, so dass
$$\mathrm{ggT}(a, b) = sa + tb.$$

(4 Punkte)

Aufgabe B.27. Man berechne mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler der folgenden Polynome aus $\mathbb{Q}[X]$:

$$P = X^3 + X^2 + X - 3, \quad Q = X^6 - X^5 + 6X^2 - 13X + 7.$$

(3 Punkte)

Aufgabe B.28. Ist $P = X^9 - 4$ irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$?

(3 Punkte)

Aufgabe B.29. Sei K ein Körper und seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ algebraisch über K. Dann ist $K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)/K$ eine endliche Körpererweiterung.

(3 Punkte)

Aufgabe B.30. Man finde das Minimalpolynom von $i \in \mathbb{C}$ über $\mathbb{Q}(\alpha)$, wobei $\alpha \in \mathbb{C}$ die Gleichung $\alpha^3 - 2 = 0$ erfüllt.

(4 Punkte)

Aufgabe B.31. Man berechne den Grad der Körpererweiterung $\mathbb{C}/\mathbb{R}(\alpha)$ mit $\alpha \in \mathbb{C}$, so dass $\alpha^2 + 2 = 0$.

(3 Punkte)

Aufgabe B.32. Man berechne den Grad der Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\alpha, \beta)/\mathbb{Q}$ mit $\alpha^5 + 15\alpha^2 - 221\alpha + 6 = 0$ und $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$, so das $\beta^7 = -1$.

(6 Punkte)

Aufgabe B.33. Man berechne den Grad der Körpererweiterung $\mathbb{F}_5(\alpha, \beta, \gamma)/\mathbb{F}_5$ mit $\alpha^5 - \alpha - 1 = 0$, $\beta^3 - 3\beta^2 + 1 = 0$ und $\gamma = 3\alpha - \beta$.

(6 Punkte)

Aufgabe B.34. Besuchen Sie https://www.euclidea.xyz und spielen Sie *Euclidea*. (Man kann sowohl mit dem Handy, als auch mit dem Computer spielen.)

Machen Sie einen Screenshot, in dem Sie zeigen, wie viele Sterne Sie bei *1. Alpha* bekommen haben. Sie erhalten so viele Punkte dafür, wie in der folgenden Tabelle gezeigt wird:

36 Sterne	6 Punkte
27–35 Sterne	3 Punkte
18–26 Sterne	2 Punkte
9–17 Sterne	1 Punkt

Aufgabe B.35. Zeigen Sie, dass die Menge der Dedekindscher Schnitte in $\mathbb{Q}$ bezüglich der Addition eine abelsche Gruppe ist.

(3 Punkte)

Extra Aufgaben

Diese Aufgaben sind eher schwerig, im Vergleich zu einer typischen Aufgabe dieser Vorlesung. Einige davon haben schon ein bisschen mit weiterführenden Gebieten zu tun, und in diesem Fall sind solche Aufgaben mit den Namen dieser Gebieten markiert.

Aufgabe B.36. Sei G eine Gruppe, $H_1 \subset G$ und $H_2 \subset G$ Untegruppen. Es seien weiter $N_1 \triangleleft H_1$ und $N_2 \triangleleft H_2$ Normalteiler. Dann gilt

$$\frac{N_1(H_1 \cap H_2)}{N_1(H_1 \cap N_2)} \cong \frac{H_1 \cap H_2}{(H_1 \cap N_2)(N_1 \cap H_2)} \cong \frac{N_2(H_1 \cap H_2)}{N_2(N_1 \cap H_2)}.$$

(5 Punkte)

Aufgabe B.37.

(a) Sei G eine endliche Gruppe, die auf einer endlichen Menge X operiert. Für jedes $g \in G$ definiert man $X^g := \{x \in X \mid gx = x\}$. Sein X/G die Menge der Bahnen. Man zeige

$$|G||X/G| = \sum_{g \in G} |X^g|.$$

Hinweis: $\sum_{g \in G} |X^g|$ zählt die Elemente in einer Teilmenge von $G \times X$.

(b) Wie viele unterschiedliche Möglichkeiten gibt es, ein Kubus mit drei Farben zu färben? Jede Seite soll mit eine einzige Farbe gefärbt werden und unterschiedlich bedeutet verschieden bezüglich der Drehsymmetrie.

(6 Punkte)

Aufgabe B.38 (Algebraische Zahlentheorie)**.** Sei $\mathbb{Z}[i] \subset \mathbb{C}$ der Ring der komplexen Zahlen, die als $a+ib$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ geschrieben werden können. Man darf ohne Beweis benutzen, dass $\mathbb{Z}[i]$ ein Ring ist. Wir definieren folgende Abbildung:

$$\begin{aligned} N\colon \mathbb{Z}[i] \setminus \{0\} &\to \mathbb{N} \\ a + ib &\mapsto (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2. \end{aligned}$$

(a) Es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i] \setminus \{0\}$. Man zeige, dass $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$.

(b) Man zeige, dass $u \in \mathbb{Z}[i]$ genau dann eine Einheit ist, wenn $N(u) = 1$.

(c) Man rechne die Gruppe der Einheiten $\mathbb{Z}[i]^\times$. Das heißt, man gebe explizite Erzeuger und Relationen für diese Gruppe und man sage, ob es isomorph zu einer bekannte Gruppe ist.

(d) Es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i] \setminus \{0\}$. Man zeige, dass $N(\alpha\beta) \geq N(\alpha)$.

(e) Es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$ mit $\beta \neq 0$. Man zeige, dass es Elemente $q, r \in \mathbb{Z}[i]$ mit $\alpha = q\beta + r$ gibt, so dass $r = 0$ oder $N(r) < N(\beta)$. Tipp: $\frac{\alpha}{\beta} = q + \frac{r}{\beta}$.

(f) Man benutze Teil (e) dieser Aufgabe zu beweisen, dass $\mathbb{Z}[i]$ ein Hauptidealring. Hinweis: nicht vergessen zu beweisen, dass $\alpha = 0$ oder $\beta = 0$ aus $\alpha\beta = 0$ folgt!

(g) Ist $2 \in \mathbb{Z}[i]$ unzerlegbar in diesem Hauptidealring?

(h) Sei $p \in \mathbb{N}_{>2}$ eine Primzahl. Dann gibt es $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $p = a^2 + b^2$ genau dann, wenn sie in $\mathbb{Z}[i]$ zerlegbar wird.

(20 Punkte)

Aufgabe B.39 (Homologische Algebra)**.** Sind G und H abelsche Gruppen, so ist die Menge $\mathrm{Hom}(G, H)$ aller Gruppenhomomorphismen von G auf H wieder eine abelsche Gruppe. Jeder Gruppenhomomorphismus $f\colon H \to H'$ induziert einen Gruppenhomomorphismus $f_*\colon \mathrm{Hom}(G, H) \to \mathrm{Hom}(G, H')$. Man finde Gruppen G, H und H' und einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $f\colon H \to H'$, so dass f_* nicht surjektiv ist.

(5 Punkte)

Aufgabe B.40 (Homologische Algebra)**.** Gegeben ist folgendes kommutatives Diagramm von Gruppen:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & H \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & G \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & K \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & H' \arrow[r, "f'"] & G' \arrow[r, "g'"] & K' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Das bedeutet: alle Objekte im Diagramm sind Gruppen, alle Pfeilen sind Gruppenhomomorphismen, $\beta \circ f = f' \circ \alpha$ und $\gamma \circ g = g' \circ \beta$. Es gilt weiter: f und f' sind injektiv, g und g' sind surjektiv, $\mathrm{Bild}(f) = \mathrm{Ker}(g)$, $\mathrm{Bild}(f') = \mathrm{Ker}(g')$ und α und γ sind Isomorphismen. Dann ist β auch ein Isomorphismus.

(5 Punkte)

Aufgabe B.41 (Kategorientheorie)**.** Es seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ zwei Kategorien. Ein *Funktor* $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ist:

- Eine Abbildung $F\colon \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ von die Objekte in $\mathcal{C}$ auf die Objekte in $\mathcal{D}$.

- Für jede $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ eine Abbildung $F\colon \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$, so dass $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$ und $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

Man überlege, dass wir jede Gruppe G als eine Kategorie $\mathcal{C}_G$ mit einem einzigen Objekt betrachten können, indem wir jedes Element der Gruppe als einen Morphismus von diesen Objekt auf sich selbst betrachten. Man zeige, dass ein Gruppenhomomorphismus $G \to H$ das gleiche wie ein Funktor $\mathcal{C}_G \to \mathcal{C}_H$ ist.

(5 Punkte)

Aufgabe B.42. Man zeige, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ kein Hauptidealring ist.

(5 Punkte)

Aufgabe B.43 (Kommutative Algebra)**.** Sei A ein Ring und seien $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n \subset A$ Primideale und sei $I \subset A$ ein Ideal, das in $\bigcup_{i=1}^n \mathfrak{p}_i$ enthalten ist. Dann gibt es ein $i \in \{1, \dots, n\}$, so dass $I \subset \mathfrak{p}_i$.

(5 Punkte)

Aufgabe B.44. Man beweise, dass es möglich ist, ein regelmäßiges 5-Eck zu konstruieren. Geben Sie eine explizite Konstruktion mit illustrierenden Bildern an.

(4 Punkte)

Aufgabe B.45. Sei $p \in \mathbb{N}$ prim. Wir definieren $\nu_p\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ wie folgt. Für $0 \in \mathbb{Z}$ setzen wir $\nu_p(0) = \infty$. Für $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ definieren wir $\nu_p(a)$ als die natürliche Zahl, so dass $p^{\nu_p(a)} \parallel a$, das heißt, $p^{\nu_p(a)} \mid a$ und $p^{\nu_p(a)+1} \nmid a$. Weiter definieren wir $\nu_p\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ durch

$$\nu_p\left(\frac{a}{b}\right) = \nu_p(a) - \nu_p(b).$$

(a) Zeigen Sie, dass $|\alpha|_p := p^{-\nu_p(\alpha)}$ einen Betrag auf $\mathbb{Q}$ definiert.

(b) Wir definieren die *p-adische Zahlen* $\mathbb{Q}_p$ als die Komplettierung von $\mathbb{Q}$ bezüglich des Betrages $|-|_p$. Man zeige, dass $\mathbb{Q}_p$ nicht archimedisch ist.

(c) Man beweise, dass

$$\frac{1}{1-p} = \sum_{i=0}^{\infty} p^i$$

in $\mathbb{Q}_p$ gilt, wobei man die Konvergenz in nahe liegender Weise bezüglich des Betrages $|-|_p$ verstehe.

(10 Punkte)