Algebra und Zahlentheorie WS21/22 Probeklausur
Prof. Dr. Annette Huber-Klawitter
Dr. Andreas Demleitner und M.Sc. Pedro Núñez

Aufgabe 1. Sind die folgenden Aussagen wahr? Antworten Sie jeweils im Kästchen rechts davon mit 'Ja' oder 'Nein' und geben Sie darunter eine kurze Begründung in ein bis zwei Sätzen.

Jede Gruppe der Ordnung 4 ist zyklisch.	
Sei G eine Gruppe. Dann ist die Operation $\sigma\colon G \times G \to G, (g,h) \mapsto gh$ transitiv.	
Sei A ein Ring und I ein Ideal. Dann gilt $a + I = b + I$ genau dann, wenn $a + b \in I$ gilt.	
Die Menge der reellen Polynome, die höchstens in 5 eine Nullstelle haben ist ein Ideal in $\mathbb{R}[X]$.	
Das Polynom $X^5 - 1$ hat eine doppelte Nullstelle in $\overline{\mathbb{F}}_5$.	
Es gibt einen Körper mit 2022 Elementen.	
Sei $K/\mathbb{Q}$ endlich und normal. Dann ist die Erweiterung galois.	
Das regelmäßige 18-Eck ist mit Zirkel und Lineal konstruierbar.	
Sei $\zeta_5 \in \mathbb{C}$ eine primitive 5-te Einheitswurzel. Dann ist $\lvert \operatorname{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_5)/\mathbb{Q}) \rvert = 5$.	

(Bitte wenden)

Aufgabe 2. Formulieren Sie die Rechenregeln für $+, \cdot, \leq$ auf den natürlichen Zahlen.

Aufgabe 3. Betrachten Sie die Untergruppe $H = \{\mathrm{id}, (123), (132)\}$ von S_4. Zeigen Sie, dass es keinen Gruppenhomomorphismus $f \colon S_4 \to G$ gibt, sodass H der Kern von f ist.

Aufgabe 4. Bestimmen Sie durch explizite Rechnung das Ideal in $\mathbb{Z}$, das von 51 und 18 erzeugt wird.

Aufgabe 5. Sei K der Zerfällungskörper von $X^3 - 7$ über $\mathbb{Q}$.

1. Geben Sie den Grad der Körpererweiterung $K/\mathbb{Q}$ an.
2. Bestimmen Sie die Galoisgruppe von $K/\mathbb{Q}$ durch Angabe von Erzeugern und Relationen. Ist die Gruppe abelsch?
3. Bestimmen Sie alle Zwischenkörper, die $\sqrt[3]{7} \in \mathbb{R}$ enthalten. Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 6. Sei $p_1 < \ldots < p_n$ eine Menge von Primzahlen und sei $P \in \mathbb{Q}[X_1, \ldots, X_n]$ ein Polynom. Man zeige, dass die Zahl $P(\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_n}) \in \mathbb{C}$ mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist.