PROSEMINAR "ZAHLEN" IM WINTERSEMESTER 2023/24

Organisatorisches

Das Proseminar findet dienstags 14–16 Uhr im SR 127 in der Ernst-Zermelo-Str. 1 statt. Wir folgen dem Buch "Zahlen", Ebbinghaus et. al. [E+92], Sie können aber auch gerne weitere Literatur heranziehen. Ein paar Vorschläge finden Sie am Ende dieses Programms.

Die Vorträge sollen 80 Minuten dauern, damit Zeit für eine Feedback-Runde bleibt. Eine gute Zielgröße für einen Probevortrag ohne Publikum ist 70 Minuten.

Fangen Sie mit der Vorbereitung rechtzeitig an! Bereiten Sie sich so vor, dass Sie die Mathematik sicher beherrschen und überlegen Sie sich, wie Sie sie am besten präsentieren können. Es ist sehr nützlich, viele Beispiele parat zu haben, um die Bedeutung von Definitionen oder Sätzen klar zu machen. Bereiten Sie zu Ihrem Vortrag ein Handout mit den wichtigsten Definitionen und Sätzen vor.

Treffen Sie sich spätestens eine Woche vor Ihrem Vortrag mit dem Assistenten, um Ihren Vortrag durchzusprechen. Beamer-Vorträge sind möglich, melden Sie sich aber bitte frühzeitig, wenn Sie einen Beamer-Vortrag planen.

Das Proseminar ist thematisch in vier Blöcke geteilt: p-adische Zahlen, Nichtstandard-Zahlen, Conway-Zahlen und Quaternionen.

1. p-adische Zahlen

1.1. **Einführung der p-adischen Zahlen [17.10.]** Definieren Sie p-adische Zahlen und geben Sie Beispiele von p-adischen Entwicklungen rationaler Zahlen ([E+92] Kapitel 6, §1.) Führen Sie die p-adische Bewertung ein und zeigen Sie, dass dadurch eine Norm definiert wird. Beweisen Sie die Geschlossenheitsrelation und geben Sie Beispiele für Cauchyfolgen bzgl. der p-adischen Norm. ([E+92] Kapitel 6, §3.)

1.2. **p-adische Vervollständigung der rationalen Zahlen [24.10.]** Definieren Sie Ideale in einem Ring und zeigen Sie, dass der Quotient nach einem maximalen Ideal ein Körper ist. (Als Quelle können Sie ein Algebra-Buch oder -Skript verwenden, z.B. [H22].) Konstruieren Sie die Vervollständigung $\mathbb{Q}_p$ der rationalen Zahlen bzgl. des p-adischen Betrags und definieren Sie die ganzen p-adischen Zahlen ([E+92] Kapitel 6, §3.).

1.3. **Das Henselsche Lemma [31.10.]** Formulieren Sie das Henselsche Lemma und beweisen Sie es. Stellen Sie den Zusammenhang zum Newton-Verfahren her. Zeigen Sie als Anwendung, dass $\mathbb{Q}_p$ die $(p-1)$-ten Einheitswurzeln enthält. ([H14], Kapitel 9.)

2. Nichtstandard-Zahlen

Zu diesem Abschnitt ist [LR94] eine weitere Quelle.

2.1. **Nichtstandard-Zahlen und Filter [07.11.]** Konstruieren Sie die nichtstandard reellen Zahlen und führen Sie in diesem Zusammenhang Filter und Ultrafilter ein. Geben Sie Beispiele. Zeigen Sie, dass sich jede reelle Funktion zu einer Funktion auf den nichtstandard reellen Zahlen fortsetzen lässt. ([E+92] Kapitel 12, §2 und §1.)

2.2. **Anordnung und Nachbarschaft [14.11.]** Zeigen Sie, dass sich die (Standard-)Anordnung der reellen Zahlen auf die nichtstandard reellen Zahlen fortsetzen lässt. Beweisen Sie, dass jede endliche nichtstandard reelle Zahl zu genau einer reellen Zahl benachbart ist. ([E+92] Kapitel 12, §2.)

2.3. **Formale Sprache [21.11.]** Geben Sie eine Einführung in die formale Sprache der Logik 1. Stufe und zeigen Sie die Übertragungsprinzipien in ([E+92] Kapitel 12, §3.). Beweisen Sie den Limessatz.

2.4. **Differentiation und Integration [28.11.]** Zeigen Sie elementare Differentiationsaussagen, definieren Sie nichtstandard natürliche Zahlen und beweisen Sie, dass eine stetige Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall ihr Maximum annimmt. Führen Sie Integration von nichtstandard reellen Funktionen ein und erläutern Sie den Beweis des Hauptsatzes. ([E+92] Kapitel 12, §4.)

3. Conway-Zahlen

Eine weitere Quelle für dieses Kapitel ist Conways Buch [C83].

3.1. **Konstruktion und Conway-Spiele [05.12.]** Erläutern Sie in Grundzügen die Idee von Conways Konstruktion (neuer) Zahlen.Definieren Sie Conway-Spiele sowie den Spielbegriff und zeigen Sie das Induktionsprinzip. ([E+92] Kapitel 13, §2 und §3.)

3.2. **Halbordnung [12.12.]** Erklären Sie, was eine Gewinnstrategie, positive und negative Spiele und Gleichwertigkeit sind. Illustrieren Sie diese Begriffe an Beispielen und definieren Sie eine Halbordnung für Spiele. ([E+92] Kapitel 13, §4 und §5.)

3.3. **Conway-Zahlen durch Postulate [19.12.]** Übertragen Sie die Halbordnung auf Conway-Spiele, indem Sie zeigen, dass jedem Spiel ein Conway-Spiel zugeordnet werden kann. Konstruieren Sie die Conway-Zahlen mit Hilfe von Conways Postulaten und geben Sie Beispiele. ([E+92] Kapitel 13, §6 und §7 und [C83] Kapitel 1.)

3.4. **Die Struktur der Conway-Zahlen [09.01.]** Zeigen Sie, dass die Conwayzahlen einen Körper bilden und dass sie die reellen Zahlen enthalten. ([E+92] Kapitel 13, §8, sowie [C83] Kapitel 1 und 2.)

4. Quaternionen

4.1. **Reelle Quaternionen [16.01.]** Definieren Sie die reelle Quaternionen-Algebra $\mathbb{H}$ und zeigen Sie, dass sie eine assoziative Divisionsalgebra ist. ([E+92] Kapitel 7, §1. + Teile des vorhergehenden Repetitoriums)

4.2. **Quaternionen-Algebren [23.01.]** Definieren Sie Quaternionen-Algebren über allgemeinen Körpern der Charakteristik ungleich 2. Zeigen Sie Satz 1.4 in Kapitel IX, §1, von [JS14].

Literatur

[C83] Conway, J. H. *Über Zahlen und Spiele*. Vieweg, Braunschweig, 1983.

[E+92] Ebbinghaus, H.-D. et al. *Zahlen*. Springer-Verlag, Berlin, 3. Auflage 1992.

[H14] Huber-Klawitter, A. *Skript Algebraische Zahlentheorie, Sommersemester 2014*. Abrufbar unter https://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ss14/algzt/azt.pdf

[H22] Huber-Klawitter, A. *Skript Algebra und Zahlentheorie, Wintersemester 2021/2*. Abrufbar unter https://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ws21/azt/algebra21.pdf

[JS14] Jantzen, J. C., und Schwermer, J. *Algebra*. Springer-Verlag, Berlin, 2. Auflage 2014.

[LR94] Landers, D., und Rogge, L. *Nichtstandard Analysis*. Springer-Verlag, Berlin, 1994.