Aufgabe 2.1. Berechnen Sie $\binom{7}{6}$, $\binom{7}{5}$, $\binom{8}{6}$.

Aufgabe 2.2. Multiplizieren Sie $(a+b)^7$ mittels binomischer Formel aus.

Aufgabe 2.3. Beweisen Sie mit vollständiger Induktion:

1. $\sum_{i=1}^n i = \frac{(n+1)n}{2}$,
2. $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$,
3. $\sum_{i=0}^n b^i = \frac{b^{n+1}-1}{b-1}$,
4. $\sum_{i=0}^n (b-1)b^i = b^{n+1} - 1$.

Aufgabe 2.4. Zeigen Sie die Formel

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

aus der Vorlesung mit vollständiger Induktion.

Aufgabe 2.5. Zeigen Sie ohne vollständige Induktion:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

Aufgabe 2.6. Verifizieren Sie für $c(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ die Rekursionsformel für Binomialkoeffizienten.

Aufgabe 2.7. Wir definieren die Funktion $f(x) = x^n$. Leiten Sie die Formel für die Ableitung $f'(x)$ her.

1. Bestimmen Sie mittels der binomischen Formel $\frac{(x+h)^n - x^n}{h}$.
2. Berechnen Sie naiv den Grenzwert $h \to 0$.

Aufgabe 2.8. Berechnen Sie mit Hilfe des kleinen Satzes von Fermat $12^{715} \mod 17$.

Aufgabe 2.9. Überlegen Sie sich einen Algorithmus zur Verechnung von $a^n \mod b$ für eine feste natürliche Zahl b und $a \in \mathbb{Z}$:

1. Schreibe Sie n im Binärsystem.
2. Berechnen Sie $a^{2^m} \mod b$ für $m \geq 1$.
3. Berechnen Sie $a^n \mod b$ durch Multiplikation der richtigen a^{2^m}.

Wenden Sie das Verfahren an auf $12^{715} \mod 18$.

Aufgabe 2.10. Wenden Sie den Primzahltest der Vorlesung auf die folgenden Zahlen an. Berechnen Sie dafür $a^{n-1} \mod n$ für einige Werte von a.

1. $n = 17$
2. $n = 21$
3. $n = 561$
4. $n = 101$.

Handelt es sich um Primzahlen?

Aufgabe 2.11. Schreiben Sie die ersten 10-20 Zeilen des Pascalsche Dreiecks modulo 2 und modulo 3 auf. Sehen Sie Muster? Können Sie die Muster erklären?