**Aufgabe 3.1.** Berechnen Sie die Dezimalbruchentwicklung von

$$1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9, 1/10.$$

**Aufgabe 3.2.** Berechnen Sie das Produkt von 1/3 und 3 in der Dezimalbruchdarstellung.

**Aufgabe 3.3.** Sei $b \geq 2$ eine natürliche Zahl. Verallgemeinern Sie die Formulierung von Satz 3.5 auf $b$-adische Brüche.

**Aufgabe 3.4.** Berechnen Sie die 2-adische Entwicklung von 1/3 und 1/9. Berechnen Sie die Summe und das Produkt als 2-adische Brüche.

**Aufgabe 3.5.** Geben Sie einen Algorithmus/Rekursionsformeln zur Addition von zwei 2-adischen Brüchen an.

**Aufgabe 3.6.** Sei $b \geq 2$ eine natürliche Zahl. Bestimmen Sie Menge der reellen Zahlen mit einer endlichen $b$-adischen Entwicklung. Zeigen Sie, dass diese Menge abgeschlossen ist unter Addition und Multiplikation.

**Aufgabe 3.7.** Zeigen Sie: Ein Dezimalbruch repräsentiert genau eine rationale Zahl (d.h. $a/b$ für $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$), wenn die Dezimalbruchentwicklung periodisch ist.

**Aufgabe 3.8.** Beweisen Sie die Eindeutigkeitsaussage in Satz 3.5 zur Dezimalbruchentwicklung.

**Aufgabe 3.9.** Beweisen Sie das Assoziativgesetz $(a + b) + c = a + (b + c)$ für reelle Zahlen mit der axiomatischen Charakterisierung der reellen Zahlen wie in der Vorlesung.

**Aufgabe 3.10.** Seien $q_1 = a_1/b_1$ und $q_2 = a_2/b_2$ rationale Zahlen (also $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$, $b_i \neq 0$. Geben Sie Formeln für die Summe und das Produkt an. Überprüfen Sie, dass der Wert unabhängig ist von der Wahl der Darstellung.

(Bitte wenden)

**Aufgabe 3.11.** Sei $\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{10^{i!}}$. Zeigen Sie, dass $\alpha$ *transzendent* ist, d.h. es gibt keine rationalen Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ gibt, so dass

$$\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \cdots + a_n\alpha^0 = 0.$$

*Kommentar:* Zahlen dieser Bauart heißen *Liouvillezahlen*.