Prof. Dr. Wolfgang Soergel
Dr. Antonio Sartori

Universität Freiburg
WS 2014/2015

Übungen zu Lineare Algebra I – Blatt 11

Aufgabe 1. (**Nullstellensatz für lineare Hyperebenen**, 3 Punkte) Sei k ein unendlicher Körper. Für eine Linearform $f \in (k^d)^\top$ sei $H_f = \{\boldsymbol{X} \in k^d \mid f(\boldsymbol{X}) = 0\}$ die durch f definierte Hyperebene. Man zeige: Verschwindet ein Polynom $p \in k[X_1, \dots, X_d]$ auf H_f, so wird es von f geteilt. *Hinweis: Man ziehe sich in einem ersten Schritt auf den Fall $f(\boldsymbol{x}) = x_1$ zurück.*

Aufgabe 2. (3 Punkte) Sei k ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $X_0, \dots, X_n \in k$. Man zeige die folgende Formel für die Determinante der **van-der-Monde Matrix**:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & X_0 & X_0^2 & \dots & X_0^n \\ 1 & X_1 & X_1^2 & \dots & X_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_n & X_n^2 & \dots & X_n^n \end{pmatrix} = \prod_{0 \le j < i \le n} (X_i - X_j).$$

Hinweis: Man nehme zuerst $k = \mathbb{Q}$ an und benutze die Aufgabe 1.

Aufgabe 3. (1+2+2+1 Punkte) Sei $A \in \mathrm{Mat}(4; \mathbb{Q})$ die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Man berechne das charakteristische Polynom von A.
(ii) Man bestimme die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren der Matrix A.
(iii) Ist A triagonalisierbar? Falls so, finde man eine Basis $\mathcal{B}$, bezüglich derer die Matrix ${}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}}$ von der durch A gegebenen linearen Abbildung f obere Dreiecksgestalt hat.
(iv)* Ist A diagonalisierbar? Falls so, finde man eine Basis $\mathcal{B}'$, bezüglich derer die Matrix ${}_{\mathcal{B}'}[f]_{\mathcal{B}'}$ diagonal ist.

Aufgabe 4. (4 Punkte)
(i) Sei V ein Vektorraum über einem Körper einer von zwei verschiedenen Charakteristik und $f\colon V \to V$ eine lineare Abbildung mit $f^2 = \mathrm{id}_V$. Man zeige: f ist diagonalisierbar und hat keine Eigenwerte außer ± 1.
(ii)* Für $k = \mathbb{F}_2$, finde man eine lineare Abbildung $g\colon k^2 \to k^2$ mit $g^2 = \mathrm{id}_{k^2}$, die nicht diagonalisierbar ist.

Abgabefrist: Donnerstag, den 22. Januar um 8.00 Uhr.