Prof. Dr. Wolfgang Soergel
Dr. Antonio Sartori

Universität Freiburg
WS 2014/2015

Übungen zu Lineare Algebra I – Blatt 13

Aufgabe 1 (1+1+2+2 Punkte)**.** Sei E der zweidimensionale reelle affine Raum $\mathbb{C}$. Für alle $a, b \in \mathbb{C}$ sei $D^{\pm}_{a,b}\colon E \to E$ die Abbildung definiert durch die Vorschrift:

$$D^{+}_{a,b}z = az + b \text{ beziehungsweise } D^{+}_{a,b}z = a\bar{z} + b$$

(i) Man zeige, dass $D^{\pm}_{a,b}$ affin ist, und man bestimme ihren linearen Anteil.
(ii) Man zeige dass die Menge $K = \{D^{\pm}_{a,b} \mid |a| = 1\}$ eine Untergruppe von $\mathrm{Aff}^{\times}(E)$ ist.
(iii) Man zeige, dass K eine Kongruenzgruppe von E ist. Damit ist also (E, K) eine Kongruenzebene.
(iv) Sei $\vec{K}$ die Gruppe der linearen Anteile der Abbildungen aus K. Man bestimme die unter $\vec{K}$ invarianten Skalarprodukte auf $\vec{E}$.

Aufgabe 2 (2 Punkte)**.** Sei V ein Vektorraum mit einem Skalarprodukt. Man zeige die **Parallelogrammregel** $2\|v\|^2 + 2\|w\|^2 = \|v - w\|^2 + \|v + w\|^2$ für alle $v, w \in V$.

Aufgabe 3 (2 Punkte)**.** Man zeige, dass die Vorschrift

$$\langle p(X), q(X)\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$$

ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum $\mathbb{R}[X]$ der Polynome mit reellen Koeffizienten definiert.

Aufgabe 4 (3 Punkte)**.** Seien V, L Vektorräume mit $\dim L = 1$. Sei $(v_i)_{i\in I}$ eine Basis von V und $l \in L$ ein von null verschiedener Vektor. Man zeige, dass $(v_i \otimes l)_{i\in I}$ eine Basis von $V \otimes L$ ist. Insbesondere gilt $\dim(V \otimes L) = \dim V$.

Aufgabe 5 (3 Punkte)**.** Sei L ein eindimensionaler Vektorraum über einem Körper k. Man zeige, dass es genau einen Vektorraumisomorphismus $L \otimes L^{\perp} \to k$ mit $l \otimes f \mapsto f(l)$ für alle $l \in L, f \in L^{\perp}$ gibt.

Abgabefrist: Donnerstag, den 05. Februar um 8.00 Uhr.