Prof. Dr. Wolfgang Soergel
Dr. Antonio Sartori

Universität Freiburg
SS 2015

Übungen zu Lineare Algebra II – Blatt 1

Aufgabe 1 (3 Punkte)**.** Sei $V = \mathbb{R}^4$ der vier-dimensionale euklidische Vektorraum mit dem Standard-Skalarpodukt, und sei H der Unterraum

$$H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in V \mid x_1 - x_4 = 0,\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 0\}.$$

Man bestimme eine Basis von dem orthogonalen Raum $H^\perp$ und man schreibe die Matrix der orthogonalen Projektion auf H bezüglich der Standard-Basis.

Aufgabe 2. (1+2 Punkte) Sei $A \in \mathrm{Mat}(3; \mathbb{R})$ die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(i) Man beweise, dass die Vorschrift $\langle v, w\rangle_A = v^\top A w$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ definiert.
(ii) Man bestimme eine orthonormale Basis von $\mathbb{R}^3$ bezüglich dieses Skalarprodukts.

Aufgabe 3. (1+2 Punkte)
(i) Man beweise, dass der durch die Matrix

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}i\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}i\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

definierte Endomorphismus von $\mathbb{C}^2$ unitär ist (bezüglich des Standard-Skalarprodukts).
(ii) Man finde eine orthogonale Basis aus Eigenvektoren für U.

Aufgabe 4. (1+2 Punkte)
(i) Sei V ein euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Man beweise die **Polarisierungsidentität**

$$2\langle v, w\rangle = \|v + w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2 \qquad \text{für alle } v, w \in V.$$

(ii) Man zeige: eine lineare Abbildung von (reellen oder komplexen) Skalarprodukträumen ist orthogonal bzw. unitär genau dann, wenn sie die Längen aller Vektoren erhält.

Aufgabe 5. (4 Punkte) Sei $\mathbb{R}^3$ der drei-dimensionale affine euklidische Raum und sei φ der affine Endomorphismus

$$\varphi\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z + 2 \\ -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z \\ -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z + 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Man zeige, dass φ eine Isometrie ist.
(ii) Man finde eine Isometrie d mit mindestens einem Fixpunkt und einen Richtungsvektor $\vec{w}$ mit $\vec{d}(\vec{w}) = \vec{w}$, so dass $\varphi = (+\vec{w}) \circ d$.
(iii) Hat φ Fixpunkte? Man beschreibe geometrisch φ.

Abgabefrist: Donnerstag, den 30. April um 8.00 Uhr.