Prof. Dr. Wolfgang Soergel
Dr. Antonio Sartori

Universität Freiburg
SS 2015

Übungen zu Lineare Algebra II – Blatt 2

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Man bestimme die Polar-Zerlegung $A = DP$ mit $D \in O(n)$ und P symmetrisch positiv definit für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3}\sqrt{6} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3}\sqrt{6} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{3}\sqrt{6} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 (2+2 Punkte)**.** Seien $A, M \in \mathrm{Mat}(3; \mathbb{R})$ die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 5 & -1 & 5 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten $\mathbb{R}^3$ als euklidischen Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle v, w \rangle_A = v^\top A w$ (siehe Aufgabe 2 auf Blatt 1).

(i) Man zeige, dass der durch M definierte Endomorphismus f selbstadjungiert ist.
(ii) Man bestimme eine orthonormale Basis von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren für f.

Aufgabe 3 (2 Punkte)**.** Sei V ein dreidimensionaler orientierter reeller Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Man zeige

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \vec{v} - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \vec{w} \qquad \text{für alle } \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V.$$

Aufgabe 4 (2 Punkte)**.** Man zeige den **Cosinus-Satz** $a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = c^2$ für jedes Dreieck mit positiven Seitenlängen a, b, c und zu c gegenüberliegendem Winkel γ.

Aufgabe 5 (2 Punkte)**.** Man zeige: Bei einem unitären Isomorphismus zwischen Skalarprodukträumen ist die adjungierte Abbildung die inverse Abbildung.

Aufgabe 6 (2 Punkte)**.** Man zeige: Ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen Skalarproduktraums ist genau dann selbstadjungiert, wenn es dazu eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren gibt und alle Eigenwerte reell sind. (Es gibt hier nur Punkte für den Beweis der nicht vom Spektralsatz bereits abgedeckten Implikation.)

Abgabefrist: Donnerstag, den 7. Mai um 8.00 Uhr.