Prof. Dr. Wolfgang Soergel
Dr. Antonio Sartori Universität Freiburg
SS 2015

Übungen zu Lineare Algebra II – Blatt 4

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Sei V ein Vektorraum der Dimension n über dem Körper k. Wir sagen, dass zwei Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}(n; k)$ **kongruent** sind, wenn sie die selbe Bilinearform $b \in \mathrm{Bil}(V)$ bezüglich zwei Basen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ von k^n darstellen (d.h., $\mathrm{F}_{\mathcal{A}}(b) = A$ und $\mathrm{F}_{\mathcal{B}}(b) = B$), oder in anderen Worten wenn es eine invertierbare Matrix $M \in \mathrm{GL}(n; k)$ gibt mit $B = M^\top AM$.

Welche folgender reellen Matrizen sind zueinander kongruent?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 11 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$D = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & -3 \\ 6 & -3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Man betrachte auf $\mathbb{C}^2$ und $\mathbb{C}^3$ das (hermitische) Standardskalarprodukt, und sei $f\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3$ die lineare Abbildung definiert durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} i & 1+i \\ 1 & -1 \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Man finde eine Singulärwertzerlegung von f und man bestimme ihre Singulärwerte.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Sei $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^4)$ der von der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

dargestellte Endomorphismus. Man bestimme die Eigenwerte von f. Man finde Basen der Eigenräume und der Hauptträume von f.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums V über dem Körper k. Man zeige, dass folgende äquivalent sind:

(a) f ist diagonalisierbar;
(b) f ist trigonalisierbar, und für jedes $\lambda \in k$ gilt $\mathrm{Hau}(f; \lambda) = \mathrm{Eig}(f; \lambda)$;
(c) V zerfällt in die direkte Summe der Eigenräume von f.

Aufgabe 5 (2+2 Bonuspunkte)**.** Sei ω die Bilinearform auf $\mathbb{R}^4$ dargestellt bezüglich der Standardbasis von der Fundamentalmatrix

$$[b] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Man zeige, dass $(\mathbb{R}^4, \omega)$ ein symplektischer Raum ist und man finde eine Basis von $\mathbb{R}^4$ bezüglich derer ω Standardform hat (wie im Satz 2.4.2).

(ii) Man finde nicht-triviale Untervektorräume U, V von $\mathbb{R}^4$ für die gilt $U \oplus U^\perp = \mathbb{R}^4$ und $V = V^\perp$.

Aufgabe 6 (4 Bonuspunkte)**.** Sei V ein endlichdimensionaler symplektischer Vektorraum. Man zeige: Je zwei von Null verschiedene Vektoren können durch einen die symplektische Form erhaltenden Automorphismus ineinander überführt werden.

Aufgabe 7 (2+2 Bonuspunkte)**.** Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum mit einer Bilinearform b. Für jedes $v \in V$ sei $\varphi_v \in V^*$ die Linearform definiert durch die Vorschrift $\varphi_v(w) = b(v, w)$, und sei $\Psi \colon V \to V^*$ die Abbildung $\Psi(v) = \varphi_v$.

(i) Man zeige: Ψ ist ein Isomorphismus genau dann, wenn die Bilinearform b nicht-ausgeartet ist.

(ii) Sei nun b symplektisch. Man zeige, dass für jeden Untervektorraum $U \subseteq V$ gilt $\dim U + \dim U^\perp = \dim V$. *(Hinweis: man betrachte Kernel und Bild der linearen Abbildung $V \to U^*$, $v \mapsto \varphi_v|_U$.)*

Hinweis: In den Aufgaben 5 und 7 notieren wir V^* den Dualraum und $V^\perp$ den Orthogonalraum (bezüglich einer Bilinearform). Insbesondere, wenn V ein Vektorraum mit einer Bilinearform b und $H \subseteq V$ ein Untervektorraum ist, dann ist $H^\perp = \{v \in V \mid b(v, h) = 0 \text{ für alle } h \in H\}$.

Abgabefrist: **Dienstag**, den 02. Juni um 8.00 Uhr.