Prof. Dr. Wolfgang Soergel
Dr. Antonio Sartori

Universität Freiburg
SS 2015

Übungen zu Lineare Algebra II – Blatt 5

Aufgabe 1 (6 Punkte)**.** Man bestimme die Jordan'sche Normalform und die Jordan-Zerlegung der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

und man berechne $\exp(B)$.

Aufgabe 2 (3 Punkte)**.** Sei $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^2)$ und sei $Z(f) = \{g \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^2) \mid gf = fg\}$ der Untervektorraum der mit f kommutierenden Endomorphismen. Man zeige, dass die Dimension von $Z(f)$ entweder 2 oder 4 ist. *[Hinweis: Jordan'sche Normalform.]*

Aufgabe 3 (3 Punkte)**.** Seien $x, y \in \mathrm{End}(V)$ zwei miteinander kommutierende Endomorphismen eines endlichdimensionalen Vektorraums V, mit Jordan-Zerlegungen $x = x_\mathrm{s} + x_\mathrm{n}$ und $y = y_\mathrm{s} + y_\mathrm{n}$. Man zeige, dass für die Jordan-Zerlegung von $x + y$ gilt $(x+y)_\mathrm{s} = x_\mathrm{s} + y_\mathrm{s}$ und $(x+y)_\mathrm{n} = x_\mathrm{n} + y_\mathrm{n}$.

Aufgabe 4 (2 Punkte)**.** Seien $K \subseteq H$ Untergruppen einer endlichen Gruppe G. Man zeige

$$|G/K| = |G/H| \cdot |H/K|\,.$$

Aufgabe 5 (1+2 Punkte)**.** Man zeige: Jede Untergruppe vom Index Zwei ist ein Normalteiler. Jede Untergruppe von endlichem Index umfaßt einen Normalteiler von endlichem Index.

Abgabefrist: Donnerstag, den 11. Juni um 8.00 Uhr.