Prof. Dr. Wolfgang Soergel
Dr. Antonio Sartori

Universität Freiburg
SS 2015

Übungen zu Lineare Algebra II – Blatt 6

Aufgabe 1 (2 + 2 Punkte)**.** Man zeige:

(i) Das Urbild eines Normalteilers unter einem Gruppenhomomorphismus ist stets ein Normalteiler. Insbesondere ist der Kern eines Gruppenhomomorphismus stets ein Normalteiler.

(ii) Das Bild eines Normalteilers unter einem surjektiven Gruppenhomomorphismus ist stets ein Normalteiler.

Aufgabe 2 (2 Punkte)**.** Man bestimme alle Untergruppen und Normalteiler der symmetrischen Gruppe S_3. Welche Untergruppen sind zyklisch?

Aufgabe 3 (2 Punkte)**.** Man gebe ein dreielementiges bezüglich der Inklusion minimales Erzeugendensystem der Gruppe $\mathbb{Z}$ an.

Aufgabe 4 (2 + 2 Punkte)**.** Sei $G = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

(i) Für alle $n \mid 24$, man bestimme wie viele Elemente von G die Ordnung n haben.

(ii) Für alle $n \mid 24$, wie viele Untergruppen H der Ordnung n hat die Gruppe G?

Aufgabe 5 (1 + 1 + 2 Punkte)**.** Seien H eine Untergruppe und N ein Normalteiler einer Gruppe G. Man zeige folgende Aussagen:

(i) Die Teilmenge $HN = \{hn \mid h \in H, n \in N\}$ ist eine Untergruppe von G, und N ist ein Normalteiler von HN.

(ii) $H \cap N$ ist ein Normalteiler von H.

(iii) Die Vorschrift $h \mapsto hN$ induziert einen Gruppenisomorphismus $H/(H \cap N) \cong HN/N$.

Abgabefrist: Donnerstag, den 18. Juni um 8.00 Uhr.