Prof. Dr. Wolfgang Soergel
Dr. Antonio Sartori

Universität Freiburg
SS 2015

Übungen zu Lineare Algebra II – Blatt 7

Aufgabe 1 (4 Punkte). Man wende den Elementarteilersatz auf die folgende Matrix A an:

$$A = \begin{pmatrix} -12 & 6 & -6 & 12 & -18 \\ 4 & -4 & 2 & -6 & 8 \\ 10 & 1 & 6 & -3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Sei $f\colon \mathbb{Z}^5 \to \mathbb{Z}^3$ der durch A definierte Gruppenhomomorphismus. Man beschreibe die Gruppe $\mathbb{Z}^3/(\operatorname{im} f)$ nach der Klassifikation der endlich erzeugten abelschen Gruppen durch Teilerfolgen und durch Multimengen von Primzahlpotenzen.

Aufgabe 2 (3 Punkte). Man beschreibe die multiplikative Gruppe $(\mathbb{Z}/20\mathbb{Z})^\times$ der Einheiten modulo 20 in beiden Klassifikationen der endlich erzeugten abelschen Gruppen.

Aufgabe 3 (2 Punkte). Man bestimme alle abelschen Gruppen der Ordnung 72 bis auf Isomorphismus.

Aufgabe 4 (3 Punkte). Sei H eine Untergruppe einer abelschen Gruppe G. Man sagt, dass die Inklusion $i\colon H \hookrightarrow G$ spaltet, wenn es einen Homomorphismus $p\colon G \to H$ gibt, mit $p \circ i = \mathrm{id}_H$.

Man zeige, dass i spaltet genau dann, wenn $G \cong H \times G/H$. Spalten die Inklusionen

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \qquad \text{und} \qquad \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong 2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}\ ?$$

Aufgabe 5 (3 Punkte). Wiewiele Homomorphismen gibt es von $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$?

Abgabefrist: Donnerstag, den 25. Juni um 8.00 Uhr.