Prof. Dr. Wolfgang Soergel
Dr. Antonio Sartori

Universität Freiburg
SS 2015

Übungen zu Lineare Algebra II – Blatt 8

Aufgabe 1 (5 Punkte)**.** Man betrachte folgende Wirkungen von Gruppen auf Mengen:

(1) Im euklidischen Vektorraum $V = \mathbb{R}^n$ wirkt die orthogonale Gruppe $G = O(n;\mathbb{R})$ auf der Menge $X = \{v \in V \mid \|v\| = 1\}$ aller Vektoren der Länge 1.

(2) Die multiplikative Gruppe des Körpers $k^\times$ wirkt auf dem k-Vektorraum V durch Multiplikation mit Skalaren.

(3) Gegeben ein affiner Raum A operiert der Richtungsraum $\vec{A}$ auf A durch Verschiebungen.

(4) Die zyklische Gruppe der komplexen vierten Einheitswurzeln $\{\pm 1, \pm i\}$ operiert auf $\mathbb{C}$ durch Multiplikation.

(5) Die Gruppe $G = \mathbb{Z}$ operiert auf $X = \mathbb{R}$ durch Addition.

Man bestimme welche Wirkung frei und/oder transitiv ist, und man finde die Fixpunkte.

Aufgabe 2 (3 Punkte)**.** Sei G eine Gruppe, die auf einer Menge X wirkt. Man zeige, dass folgende Definitionen von **freier Wirkung** äquivalent sind:

(a) Es gibt eine Teilmenge $Z \subseteq X$ derart, dass die Operation $G \times X \to X$ eine Bijektion $G \times Z \to X$ induziert.

(b) Jeder Punkt $x \in X$ hat triviale Standgruppe G_x.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Sei k ein Körper. Sei $G = GL(2;k)$ und $B = \{(a_{ij}) \in G \mid a_{21} = 0\}$ die Untergruppe aller invertierbaren Matrizen von oberen Dreieckgestalt. Man zeige:

(i) G wirkt auf dem projektiven Raum $\mathbb{P}^1(k)$ durch Linksmultiplikation. Elemente von $\mathbb{P}^1(k)$ sind hier Geraden in k^2 durch den Ursprung.

(ii) Die Wirkung ist transitiv.

(iii) Der Stabilisator des Punktes $\langle(1,0)\rangle \in \mathbb{P}^1(k)$ alias der ersten Koordinatenachse ist die Untergruppe B.

(iv) Durch Einschränkung erhalten wir eine Wirkung von B auf $\mathbb{P}^1(k)$. Diese Wirkung hat genau zwei Bahnen.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Seien p eine Primzahl, $n \in \mathbb{N}$ und G eine endliche Gruppe der Ordnung p^n. Sei eine Wirkung von G auf einer endlichen Menge X gegeben, deren Kardinalität $|X|$ nicht von p geteilt wird. Man zeige, dass die Wirkung mindestens einen Fixpunkt $x \in X^G$ hat. *(Hinweis: Bahnformel.)*

Abgabefrist: Donnerstag, den 02. Juli um 8.00 Uhr.