Prof. Dr. Wolfgang Soergel
Dr. Antonio Sartori

Universität Freiburg
SS 2015

# Übungen zu Lineare Algebra II – Blatt 9

BONUS

**Aufgabe 1** (2 Punkte)**.** Man zeige, dass jede endliche Gruppe der Ordnung $n$ isomorph ist zu einer Untergruppe der symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_n$. *(Hinweis: Man betrachte die Wirkung der Gruppe auf sich selbst durch Linksmultiplikation.)*

**Aufgabe 2** (4 Punkte)**.** Für $k > 2$ sei $D_k$ die Diedergruppe, alias die Gruppe aller Kongruenzen eines gleichseitigen ebenen $k$-Ecks.

1. Welche Zahlen sind Ordnungen von Elementen von $D_k$?
2. Man zeige, dass die Drehungen aus $D_k$ einen Normalteiler $N \lhd D_k$ bilden.
3. Sei $p$ ein Eckpunkt. Wiewiele Elemente hat die Isotropiegruppe $H$ von $p$? Ist $H$ ein Normalteiler?
4. Man zeige, dass die Multiplikation eine Bijektion liefert:
$$\varphi\colon N \times H \longrightarrow D_k, \qquad (n,h) \longmapsto nh.$$
Ist $\varphi$ ein Gruppenisomorphismus?

**Aufgabe 3** (4 Punkte)**.** (i) Sei $T_n$ ein $n$–dimensionales reguläres Hypertetraeder, das wir mit der Menge
$$T_n = \left\{(x_1,\dots,x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; x_i \in \{\pm 1\}, \textstyle\sum_{i=1}^{n+1} x_i = n-1\right\}$$
seiner Eckpunkte identifizieren. Sei $S_n$ die Gruppe seiner orthogonalen Symmetrien, d.h. die Untergruppe von $\mathrm{O}(n+1,\mathbb{R})$, die $T_n$ stabilisiert. Man zeige, dass sich jede Permutation der Menge $T_n$ zu einem Automorphismus von $\mathbb{R}^{n+1}$ erweitern lässt. Man folgere, dass $S_n$ isomorph zu der symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_{n+1}$ ist.

(ii) Sei $B_n$ die Gruppe aller orthogonalen Symmetrien eines $n$–dimensionalen regulären Hyperwürfels in $\mathbb{R}^n$, den wir mit der Menge
$$\left\{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x_i \in \{\pm 1\}\right\}$$
seiner Eckpunkte identifizieren. Man zeige, dass $B_n$ die Ordnung $2^n \cdot n!$ hat.

**Aufgabe 4** (3 Punkte)**.** Sei $V$ ein Vektorraum und $H \subseteq V$ ein Untervektorraum und $p : V \twoheadrightarrow V/H$ die kanonische Abbildung. Man zeige, dass die Vorschrift $W \mapsto p(W)$ eine Bijektion definiert zwischen den Untervektorräumen $W$ von $V$, die $H$ umfassen, und den Untervektorräumen des Quotienten $V/H$.

**Aufgabe 5** (3 Punkte)**.** Sei $V$ ein endlichdimensionaler Vektorraum, $f$ ein Endomorphismus von $V$ und $W \subseteq V$ ein unter $f$ stabiler Untervektorraum. Man zeige, dass $f$ einen Endomorphismus $\overline{f}\colon V/W \to V/W$ induziert und es gilt
$$\det f = \det f|_W \cdot \det \overline{f} \qquad \text{und} \qquad \operatorname{tr} f = \operatorname{tr} f|_W + \operatorname{tr} \overline{f},$$
wobei $f|_W$ die Einschränkung $f\colon W \to W$ ist.

Abgabefrist: Donnerstag, den 09. Juli um 8.00 Uhr.