Prof. Dr. Wolfgang Soergel
Dr. Antonio Sartori

Universität Freiburg
SS 2016

Übungen zu Darstellungstheorie – Blatt 1

Aufgabe 1 (4 Punkte). Man zeige, daß gegeben eine Primzahl p jede zyklische p-Gruppe über einem Körper der Charakteristik p bis auf Isomorphismus nur eine einzige einfache Darstellung besitzt.

Aufgabe 2 (4 Punkte). Sei

$$M = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/25\mathbb{Z}.$$

Man gebe eine Kompositionsreihe von M als $\mathbb{Z}$-Modul, man bestimme seine Länge und seine Kompositionsfaktoren.

Aufgabe 3 (**Kanonische Beschreibung isotypischer Komponenten**, 4 Punkte). Gegeben ein Ring R und ein einfacher R-Modul E bezeichne $S := (\operatorname{End}_R E)^{\mathrm{opp}}$ den Opponierten seines Endomorphismenschiefkörpers. Mit diesen Notationen liefert für jeden weiteren R-Modul M das Einsetzen einen Isomorphismus von R-Moduln

$$E \otimes_S \operatorname{Hom}_R(E, M) \xrightarrow{\sim} M_E$$

mit der E-isotypischen Komponente von M.

Aufgabe 4 (4 Punkte).
(i) Ist A ein Ring und E ein einfacher A-Modul, so ist die E-isotypische Komponente A_E von A als A-Linksmodul ein Unterbimodul von A.
(ii) Ist F ein weiterer einfacher A-Modul mit $E \not\cong F$, so gilt für das Produkt der isotypischen Komponenten $A_E A_F = 0$.

Abgabefrist: Donnerstag, den 28. April.