Prof. Dr. Wolfgang Soergel
Dr. Antonio Sartori

Universität Freiburg
SS 2016

Übungen zu Darstellungstheorie – Blatt 10

Aufgabe 1 (8 Punkte)**.** Sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n;\mathbb{C})$ mit der Cartan'schen Unteralgebra $\mathfrak{h}$ der diagonalen Matrizen. Seien $\varepsilon_i \in \mathfrak{h}^*$ für $i = 1, \dots, n$ die Projektionen auf den Komponenten, wobei es gilt $\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n = 0$. Für $i = 1, \dots, n-1$ seien $\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$ die einfachen Wurzeln und $\varpi_i = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_i$ die fundamentalen Gewichte. Bezeichne $V = \mathbb{C}^n$ die tautologische Darstellung. Man zeige:

(i) $\rho = (n-1)\varepsilon_1 + (n-2)\varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_{n-1}$.

(ii) Die positiven ganzen Gewichte können alle geschrieben werden als $\lambda_1\varepsilon_1 + \cdots + \lambda_n\varepsilon_n$ mit $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$.

(iii) Die Darstellung $\bigwedge^i V$ für $i = 1, \dots, n-1$ hat Höchstgewicht ϖ_i.

(iv) Jede endlichdimensionale Darstellung von $\mathfrak{g}$ ist isomorph zu einer Unterdarstellung eines Tensorproduktes der $\bigwedge^i V$, und somit auch zu einer Unterdarstellung einer Tensorpotenz von V. *(Hinweis: Man zeige dass die einfache Darstellung zum Höchstgewicht $a_1\varpi_1 + \cdots + a_{n-1}\varpi_{n-1}$ eine Unterdarstellung von $(\bigwedge^1 V)^{\otimes a_1} \otimes \cdots \otimes (\bigwedge^{n-1} V)^{\otimes a_{n-1}}$ ist.)*

(v) Der Charakterring ist $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]/(X_1 \cdots X_n)$ wobei $X_i = e^{\varepsilon_i}$.

(vi) Das Charakter induziert eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Endlichdimensionale Darstellungen von } \mathfrak{g} \\ \text{bis auf Isomorphie} \end{array} \right\} \longrightarrow \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]^{\mathcal{S}_n}/(X_1 \cdots X_n)$$

mit den symmetrischen Polynomen modulo $X_1 \cdots X_n$.

(vii) Für jede endlichdimensionale einfache Darstellung gilt es $\operatorname{char} L(\lambda_1\varepsilon_1 + \cdots + \lambda_n\varepsilon_n) = S_\lambda$, wobei

$$S_\lambda = \det(X_j^{\lambda_i + n - i}) / \det(X_j^{n-i})$$

die sogenannte **Schur-Polynome** sind. *(Hinweis: Weyl'sche Charakterformel.)*

(viii) Es gilt

$$S_\lambda(1, \dots, 1) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\lambda_i - \lambda_j + j - i}{j - i}.$$

(Hinweis: Weyl'sche Dimensionformel.)

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3;\mathbb{C})$ mit Standardwahl von der Cartan'schen Unteralgebra und von den einfachen Wurzeln. Man bestimme die Bahn unter der Dot-Wirkung von $\rho = \alpha_1 + \alpha_2$. Für $V = L(\rho) = \mathfrak{g}$ die adjungierte Darstellung prüfe man nach dass $\dim V_{-\rho} = 1$ und $\dim V_{-2\rho} = 0$ mit der Konstant'schen Charakterformel.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Seien $e, f, h \in \mathfrak{g} := \mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ die Standarderzeuger und sei $C = (h+1)^2 + 4fe$ das Casimir-Element. Man zeige:

(i) Die Elemente $h, C \in U(\mathfrak{g})$ sind algebraisch unabhängig (d.h., es gibt eine Einbettung von Algebren $\mathbb{C}[h, C] \to U(\mathfrak{g})$).

(ii) Für $U(\mathfrak{g})$ als adjungierte Darstellung von $\mathfrak{g}$ gilt $U(\mathfrak{g})_0 = \mathbb{C}[h, C]$, wobei $U(\mathfrak{g})_0$ der Gewichtsraum zum Gewicht 0 ist. *(Hinweis: Sicher gilt $\mathbb{C}[h, C] \subseteq V_0$. Für alle $n \geq 0$ ist das Bild $U(\mathfrak{g})^{\leq n}$ von $\mathfrak{g}^{\otimes n}$ unter der Multiplikation eine Unterdarstellung. Man vergleiche dann die Dimension von $\mathbb{C}[h, C]^{\deg \leq n}$ und $U(\mathfrak{g})_0^{\leq n}$.)*

(iii) Für das Zentrum $Z(\mathfrak{g})$ von $U(\mathfrak{g})$ gilt $Z(\mathfrak{g}) \subseteq U(\mathfrak{g})_0$.

(iv) Es gilt $Z(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}[C]$. *(Hinweis: Die Wirkung eines zentralen Elements auf jede einfache Darstellung muss konstant sein.)*

Abgabefrist: Donnerstag, den 7. Juli.