Prof. Dr. Wolfgang Soergel
Dr. Antonio Sartori

Universität Freiburg
SS 2016

Übungen zu Darstellungstheorie – Blatt 2

Aufgabe 1 (2 Punkte)**.** Man zeige: Das Zentrum des Endomorphismenrings eines Vektorraums besteht genau aus allen Multiplikationen mit Skalaren aus dem Körper.

Aufgabe 2 (2 Punkte)**.** Gegeben eine Gruppe G und eine endliche G-Menge X und ein Körper k zeige man für den Charakter der zugehörigen Permutationsdarstellung $V = \mathrm{Ens}(X; k)$ (wobei $(g\phi)(x) = \phi(g^{-1}x)$ füir $g \in G, \phi \in V, x \in X$) die Formel

$$\chi_V(g) = |X^g|$$

In Worten ist also der Wert des Charakters bei g die als Element von k zu verstehende Zahl der Fixpunkte von g in X.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Sei $G = D_4$ die Diedergruppe (alias die Isometriegruppe eines regelmäßigen Vierecks). Man bestimme die Anzahl und die Dimension der Dartsellungen von G über $\mathbb{C}$ und man berechne die Charaktertafel.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Seien G, H endliche Gruppen, k ein Körper, V, V' endlichdimensionale Darstellungen von G und W eine endlichdimensionale Darstellung von H. Man zeige:

(i) Es gilt: $\chi_{V\oplus V'} = \chi_V + \chi_{V'}$
(ii) Die Abbildung $g \otimes h \to gh$ induziert ein Isomorphismus $k[G] \otimes k[H] \cong k[G \times H]$.
(iii) Mit dieser Identifikation gilt $\chi_{V\otimes W} = \chi_V \otimes \chi_W$.
(iv) Durch Zurückziehen entlang der Diagonale-Abbildung $G \to G \times G$ wird $V \otimes V'$ eine G-Darstellung, und es gilt $\chi_{V\otimes V'}(g) = \chi_V(g)\chi_{V'}(g)$ für alle $g \in G$.

Aufgabe 5 (4 Punkte)**.** Wir notieren $\ydiagram{3}$, $\ydiagram{1,1,1}$ und $\ydiagram{2,1}$ die triviale bzw. signum bzw. einfache zweidimensionale Darstellung von der symmetrischen Gruppe $\mathbb{S}_3$ über $\mathbb{C}$. Für $V, W \in \{\ydiagram{3}, \ydiagram{1,1,1}, \ydiagram{2,1}\}$ man zerlege die $\mathbb{S}_3$-Darstellung $V \otimes W$ in einfache Darstellungen:

$\otimes$	$\ydiagram{3}$	$\ydiagram{2,1}$	$\ydiagram{1,1,1}$
$\ydiagram{3}$			
$\ydiagram{2,1}$			
$\ydiagram{1,1,1}$			

Abgabefrist: Freitag, den 6. Mai.