Prof. Dr. Wolfgang Soergel
Dr. Antonio Sartori Universität Freiburg
SS 2016

Übungen zu Darstellungstheorie – Blatt 3

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Sei $\mathrm{GL}(n) = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^{n\times n}$ die allgemeine lineare Gruppe. Man zeige:

(i) $\mathrm{GL}(n)$ ist eine topologische Gruppe (mit der von $\mathbb{C}^{n\times n}$ induzierten Topologie).

(ii) Die Vorschrift

$$f \mapsto \int_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})} f(g) \frac{\lambda\langle g\rangle}{|\det g|^n},$$

wobei λ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{C}^{n\times n}$ ist, definiert ein Radon-Maß auf $\mathrm{GL}(n)$, das sowohl links- wie auch rechtsinvariant ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Man bestimme das linksinvariante Haarmaß auf der Gruppe der invertierbaren reellen oberen Dreiecksmatrizen mit zwei Zeilen und zwei Spalten und zeige, daß es nicht rechtsinvariant ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Man beweise, dass folgende alle Charaktere von S^1 sind (alias alle stetigen Gruppenhomomorphismen $S^1 \to \mathbb{C}^\times$):

$$\chi_n \colon S^1 \to \mathbb{C}^\times, \quad z \mapsto z^n \qquad \text{für } n \in \mathbb{Z}.$$

(Hinweis: sei χ ein Charakter. Man zeige zuerst, dass das Bild von χ in S^1 enthalten ist. Man folgere dann die Aufgabe aus der Klassifikation der stetigen Gruppenendomorphismen von $\mathbb{R}$.)
(Alternativer Hinweis: Sei χ ein Charakter. Man zeige, daß eine beschränkte Folge $n(i)$ existiert mit $\chi(z) = z^{n(i)}$ jeweils für alle 2^i-ten Einheitswurzeln z. Dann zeige man, daß so eine Folge stagnieren muß.)

Abgabefrist: Donnerstag, den 12. Mai.