Prof. Dr. Wolfgang Soergel
Dr. Antonio Sartori

Universität Freiburg
SS 2016

Übungen zu Darstellungstheorie – Blatt 4

Aufgabe 1 (4 Punkte). Eine komplexwertige Funktion auf einer Gruppe, die Matrixkoeffizient einer endlichdimensionalen komplexen (im topologischen Fall stetigen) Darstellung ist, heißt auch eine darstellende Funktion.

(i) Man zeige, dass die darstellenden Funktionen einen Ring bilden.
(ii) Man zeige, dass jedes Polynom in den Matrixeinträgen eine darstellende Funktion von $\mathrm{GL}(2;\mathbb{C})$ ist. *(Hinweis: man betrachte die tautologische Darstellung $\mathbb{C}^2$.)*
(iii) Man folgere, dass jedes Polynom in den Matrixeinträgen eine darstellende Funktion von $\mathrm{SU}(2;\mathbb{C})$.
(iv) Mithilfe des Satzes von Stone-Weierstraß zeige man, dass diese alle darstellende Funktionen von $\mathrm{SU}(2;\mathbb{C})$ sind.
(v) Gibt es weitere darstellende Funktionen von $\mathrm{GL}(2;\mathbb{C})$?

Aufgabe 2 (2 Punkte). Man zeige: Eine von Null verschiedene Darstellung V einer kompakten Hausdorffgruppe, für die die Matrixkoeffizientenabbildung $V \otimes V^* \to \mathcal{C}(G)$ injektiv ist, muss irreduzibel sein.

Aufgabe 3 (2 Punkte). Man zeige: Der Tangentialraum beim neutralen Element $e = I$ der Gruppe $\mathrm{U}(n) = \{A \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{C}) \mid A\overline{A}^\top = I\}$ der unitären Matrizen ist der Raum der schiefhermiteschen Matrizen $\mathrm{T}_I\mathrm{U}(n) = \{X \in \mathrm{Mat}(n;\mathbb{C}) \mid X + \overline{X}^\top = 0\}$.

Aufgabe 4 (2 Punkte). Man zeige, dass die Exponentialabbildung im Fall der Gruppe aller oberen Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Diagonale ein Diffeomorphismus ist. *(Hinweis: Die Logarithmusreihe liefert eine inverse Abbildung.)*

Aufgabe 5 (3 Punkte). Man zeige, dass die Exponentialabbildung im Fall der unitären Gruppe $\mathrm{U}(n)$ surjektiv ist.

Aufgabe 6 (3 Punkte). Man zeige, dass die Exponentialabbildung im Fall der Gruppe $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ nicht surjektiv ist.

Abgabefrist: Freitag, den 27. Mai.