Prof. Dr. Wolfgang Soergel
Dr. Antonio Sartori Universität Freiburg
SS 2016

Übungen zu Darstellungstheorie – Blatt 5

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Man zeige: Ist G eine Matrix-Liegruppe und $N \overset{\circ}{\triangleleft} G$ ein abgeschlossener Normalteiler, so gilt für alle $X \in \operatorname{Lie} G$ und $Y \in \operatorname{Lie} N$ sogar $[X, Y] \in \operatorname{Lie} N$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Man zeige: Das Differential des Invertierens $\operatorname{inv} : G \to G$ auf einer Matrix-Liegruppe beim neutralen Element ist die Punktspiegelung am Ursprung auf dem Tangentialraum, in Formeln $\mathrm{d}_e \operatorname{inv} = ((-1)\cdot) : \mathrm{T}_e G \to \mathrm{T}_e G$.

Aufgabe 3 (2 Punkte)**.** Gegeben ein glatter Homomorphismus von Matrix-Liegruppen $\varphi : G \to H$ zeige man die Formel $\operatorname{Lie}(\ker \varphi) = \ker(\mathrm{d}_e \varphi)$.

Aufgabe 4 (6 Punkte)**.** Sei $\mathrm{SO}(3) = \{g \in \mathrm{GL}(3; \mathbb{R}) \mid gg^\top = I,\ \det g = 1\}$.

(i) Man zeige: $\mathrm{T}_e\, G = \mathfrak{so}(3) = \{X \in \mathfrak{gl}(3; \mathbb{R}) \mid X + X^\top = 0\}$.

(ii) Man identifiziere $\mathfrak{so}(3)$ mit seiner Lie Klammer mit dem $\mathbb{R}^3$ mit Kreuzprodukt.

(iii) Man beschreibe die Automorphismen von dem $\mathbb{R}^3$, die mit dem Kreuzprodukt verträglich sind.

(iv) Man folgere, daß jeder nicht konstante stetige Gruppenhomomorphismus $\mathrm{SO}(3) \to \mathrm{SO}(3)$ von der Gestalt $(\operatorname{int} g)$ ist für genau ein $g \in \mathrm{SO}(3)$ ist.

Abgabefrist: Donnerstag, den 2. Juni.