Prof. Dr. Wolfgang Soergel
Dr. Antonio Sartori

Universität Freiburg
SS 2016

Übungen zu Darstellungstheorie – Blatt 6

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Man betrachte die Darstellung von $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ auf dem Raum $\mathbb{R}[X_1,\dots,X_n]^{(d)}$ der homogenen Polynome vom Grad d durch

$$(gP)(x) = P(g^{-1}x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,\ g \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$$

und zeige, daß in der abgeleiteten Darstellung der Liealgebra die Basismatrix E_{ij} mit einer Eins in der i-ten Zeile und j-ten Spalte und Null sonst wie der Differentialoperator $-X_j\partial_i$ operiert. Man folgere, dass diese Darstellungen sämtlich irreduzibel sind.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Genau wie in der Aufgabe 1 sind die Räume $L_{\mathbb{R}}(m) = \mathbb{R}[X,Y]^{(m)}$ aller homogenen Polynomfunktionen auf $\mathbb{R}^2$ vom Grad m unter der von der offensichtlichen Wirkung von $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ auf $\mathbb{R}^2$ induzierten Operation einfache reelle Darstellungen der Gruppe $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$. Man zeige umgekehrt, dass jede stetige einfache endlichdimensionale Darstellung von $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ isomorph ist zu genau einer dieser Darstellungen. *(Hinweis: Klassifikation der Darstellungen von* $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{R})$*.)*

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Man zeige:

(i) Gegeben ein Körper k und eine Darstellung $\rho : \mathfrak{sl}(2;k) \to \mathfrak{gl}(V)$ der Lie-Algebra $\mathfrak{sl}(2;k)$ mit ihrer Standardbasis e,h,f mit Kommutatoren $[h,e]=2e$, $[h,f]=-2f$, $[e,f]=h$ liefert der in der assoziativen Algebra $\mathrm{End}_k(V)$ zu interpretierende Ausdruck

$$4\rho(f)\rho(e) + \rho(h)(\rho(h)+2)$$

einen mit der Operation unserer Liealgebra verträglichen Endomorphismus von V, in Formel:

$$4\rho(f)\rho(e) + \rho(h)(\rho(h)+2) \in \mathrm{Mod}_k^{\mathfrak{sl}(2;k)}(V,V)$$

(ii) Im Fall der einfachen $(m+1)$-dimensionalen Darstellung $L(m)$ der Liealgebra $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ ist dieser Endomorphismus die Multiplikation mit dem Skalar $m(m+2)$.

(Hinweis: Tapfer rechnen.)

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Sei $L(m)$ die einfache $(m+1)$-dimensionale Darstellung der Liealgebra $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$. Man zeige

$$L(m) \otimes L(1) \cong L(m+1) \oplus L(m-1).$$

Abgabefrist: Donnerstag, den 9. Juni.