Prof. Dr. Wolfgang Soergel
Dr. Antonio Sartori

Universität Freiburg
SS 2016

Übungen zu Darstellungstheorie – Blatt 7

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Sei $G = \mathrm{SU}(3)$ mit dem Standardtorus der Diagonalmatrizen. Man bestimme die Fundamentalgewichte ϖ_1 and ϖ_2, und man rechne die dot-Wirkung der Weylgruppe auf ϖ_1 und ϖ_2. Für die einfache Darstellung $L(a\varpi_1+b\varpi_2)$ zum Höchstgewicht $a\varpi_1 + b\varpi_2$ zeige man

$$\chi_{L(a\varpi_1+b\varpi_2)} = \frac{X^aY^b - X^{-a-2}Y^{a+b+1} - X^{a+b+1}Y^{-b-2} + X^bY^{-a-b-3} + X^{-a-b-3}Y^a + X^{-b-2}Y^{-a-2}}{1 - X^{-2}Y - XY^{-2} + X^{-3} + Y^{-3} - X^{-2}Y^{-2}},$$

wobei $X = e^{\varpi_1}$ und $Y = e^{\varpi_2}$, und man prüfe das nach im Fall der tautologischen Darstellung $\mathbb{C}^3$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Man zeige im Fall $G = \mathrm{U}(n)$ mit dem Standardtorus T der Diagonalmatrizen dass die Inklusion $T \hookrightarrow G$ eine Bijektion liefert

$$T/W \xrightarrow{\cong} \mathrm{Konj(G)}$$

zwischen die Bahnen der Weylgruppe auf T und die Konjugationsklassen in G.

Aufgabe 3 (8 Punkte)**.** Sei $G = \mathrm{SO}(2n + 1; \mathbb{R})$.

(i) Man zeige: $\mathrm{SO}(2; \mathbb{R}) \cong S^1$.

(ii) Man zeige, dass das Bild der natürlichen Einbettung

$$\underbrace{\mathrm{SO}(2; \mathbb{R}) \times \cdots \times \mathrm{SO}(2; \mathbb{R})}_{n \text{ mal}} \subset \mathrm{SO}(2n; \mathbb{R}) \subset \mathrm{SO}(2n + 1; \mathbb{R})$$

ein maximaler Torus $T \subseteq G$ ist.

(iii) Man zeige: Die Weylgruppe $W(G;T)$ kann identifiziert werden mit der Gruppe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \rtimes \mathcal{S}_n$ aller Permutationen ϕ der Menge $\{-n, \dots, -1, 1, \dots, n\}$ für die gilt $\phi(-i) = -\phi(i)$. *(Hinweis: man untersuche die komplexen Eigenwerte der Elemente von T.)*

(iv) Man bestimme die Wurzeln von G.

(v) Man zeichne das Charaktergitter mit Wurzelsystem und zugehörigen Spiegelebenen für $\mathrm{SO}(5; \mathbb{R})$.

Abgabefrist: Donnerstag, den 16. Juni.