Prof. Dr. Wolfgang Soergel
Dr. Antonio Sartori

Universität Freiburg
SS 2016

Übungen zu Darstellungstheorie – Blatt 8

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Sei $G = \mathrm{SU}(n;\mathbb{C})$ mit dem maximalen Torus $T \subset G$ der Diagonalmatrizen, und sei $V = \mathbb{C}^n$ die tautologische Darstellung. Man zeige, dass die G-Wirkung auf $V^{\otimes i}$ eine natürliche Struktur von G-Darstellungen auf die alternierenden Potenzen $\bigwedge^i V$ induziert. Man bestimme ihre Charakteren und man zeige, dass sie für $0 \leq i \leq n$ irreduzibel sind.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Man zeige mithilfe einer Streckung der Nennerformel für eine beliebige kompakte Lie Gruppe die Formel

$$\operatorname{ch} L(n\rho) = e^{n\rho} \prod_{\alpha \in R^+} (1 + e^{-\alpha} + \cdots + e^{-n\alpha}).$$

Aufgabe 3 (8 Punkte)**.** Sei $G = \mathrm{SO}(5;\mathbb{R})$ mit dem maximalen Torus $T = \mathrm{SO}(2;\mathbb{R}) \times \mathrm{SO}(2;\mathbb{R})$ (cf. Aufgabe 3 auf Blatt 7). Wir bezeichnen durch $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \colon T \to \mathrm{SO}(2;\mathbb{R}) \cong S^1$ die Projektionen auf den zwei Komponenten. Sie bilden eine Basis der Charakteren $\mathfrak{X}(T)$, die wir als additive Gruppe notieren. Man zeige:

(i) Die Wurzeln von G sind $R = \{\pm\varepsilon_1, \pm\varepsilon_2, \pm\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2, \pm\varepsilon_1 \mp \varepsilon_2\}$.

(ii) $R^+ = \{\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \alpha_2 = \varepsilon_2\}$ bildet ein System positiver Wurzeln mit $\rho = \frac{3}{2}\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_2$.

(iii) Die zugehörigen Kowurzeln $\alpha_1^\vee, \alpha_2^\vee \colon \mathfrak{X}(T) \to \mathbb{Z}$ sind bestimmt durch

$$\langle \varepsilon_1, \alpha_1^\vee \rangle = 1, \qquad \langle \varepsilon_2, \alpha_1^\vee \rangle = -1, \qquad \langle \varepsilon_1, \alpha_2^\vee \rangle = 0, \qquad \langle \varepsilon_2, \alpha_2^\vee \rangle = 2.$$

(iv) Seien $\varpi_1 = \varepsilon_1$, $\varpi_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. Es gilt $\mathfrak{X}(T)^+ = \mathbb{Z}_{\geq 0}\varpi_1 + \mathbb{Z}_{\geq 0}\varpi_2$.

(v) Sei $L(m_1, m_2)$ der einfache Modul zum Höchstgewicht $m_1\varpi_1 + m_2\varpi_2$. Es gilt

$$\dim L(m_1, m_2) = \frac{1}{6}(m_1 + 1)(2m_2 + 1)(m_1 + 2m_2 + 2)(2m_1 + 2m_2 + 3). \qquad (\dagger)$$

(vi) Die triviale Darstellung $\mathbb{C}$, die tautologische Darstellung $\mathbb{C}^5$ und die adjungierte Darstellung $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ sind irreduzibel. Man bestimme ihre Höchstgewichte und man prüfe die Formel $(\dagger)$ nach.

Abgabefrist: Donnerstag, den 23. Juni.