Prof. Dr. Wolfgang Soergel
Dr. Antonio Sartori

Universität Freiburg
SS 2016

Übungen zu Darstellungstheorie – Blatt 9

Aufgabe 1 (3 Punkte)**.** Man zeige: Jedes Ideal einer halbeinfachen Lie-Algebra ist eine Summe von einfachen Idealen.

Aufgabe 2 (3 Punkte)**.** Jede halbeinfache Lie-Algebra g ist ihre eigene derivierte Lie-Algebra, in Formeln $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$.

Aufgabe 3 (3 Punkte)**.** Seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ Lie Algebren über k. Man zeige: Die Multiplikation liefert einen Isomorphismus

$$U(\mathfrak{a}) \otimes_k U(\mathfrak{b}) \longrightarrow U(\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}).$$

Aufgabe 4 (7 Punkte)**.** Sei $I \in \mathbb{C}^{n\times n}$ die Einheitsmatrix und sei $J \in \mathbb{C}^{2n\times 2n}$ die Matrix

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Man zeige, dass $\mathfrak{sp}(2n;\mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}(2n;\mathbb{C}) \mid X^\top J + JX = 0\}$ eine Lie Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(2n;\mathbb{C})$ ist.

(ii) Man zeige, dass die Matrizen

$$\begin{aligned} e_{ii} - e_{n+i,n+i} &\qquad 1 \le i \le n, \\ e_{ij} - e_{n+j,n+i} &\qquad 1 \le i \ne j \le n, \\ e_{i,n+i} &\qquad 1 \le i \le n, \\ e_{i,n+j} + e_{j,n+i} &\qquad 1 \le i < j \le n, \\ e_{n+i,i} &\qquad 1 \le i \le n, \\ e_{n+i,j} + e_{n+j,i} &\qquad 1 \le i < j \le n \end{aligned}$$

eine Basis von $\mathfrak{sp}(2n;\mathbb{C})$ bilden. Insbesondere hat $\mathfrak{sp}(2n;\mathbb{C})$ Dimension $2n^2 + n$.

(iii) Man könnte zeigen, dass $\mathfrak{sp}(2n;\mathbb{C})$ einfach ist. Man nehme das für diese Aufgabe einfach an.

(iv) Man zeige: Die Diagonalmatrizen in $\mathfrak{sp}(2n;\mathbb{C})$ bilden eine Cartan'sche Unteralgebra $\mathfrak{h}$. Eine Basis von $\mathfrak{h}$ ist $\{h_i := e_{ii} - e_{n+i,n+i} \mid 1 \le i \le n\}$.

(v) Im Fall $n = 2$, berechne man die Wurzeln und die Wurzelraumzerlegung. *(Hinweis: man benutze für $\mathfrak{sp}(2n;\mathbb{C})$ die Basis aus (ii) und für $\mathfrak{h}^*$ die Dualbasis $\{\varepsilon_i\}$ zu der Basis $\{h_i\}$).* Man bestimme eine Basis der Wurzeln.

(vi) Man bestimme die einfachen Kowurzeln und man zeichne das Wurzelsystem.

Abgabefrist: Donnerstag, den 30. Juni.