Prof. Dr. Wolfgang Soergel
Dr. Antonio Sartori

Universität Freiburg
WS 2015/16

Übungen zu Analysis III – Blatt 10

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Sei X ein Maßraum. Gegeben eine integrierbare Abbildung $f: X \to V$ mit Werten in einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum gilt für jede Norm auf V die Abschätzung

$$\left\| \int f \right\| \leq \int \|f\| \,.$$

(Hinweis: Man zeige das zunächst für meßbare Stufenfunktionen und argumentiere dann mit dem Satz über dominierte Konvergenz.)

Aufgabe 2 (3 Punkte)**.** Man zeige: Gegeben ein Maßraum liegen für $1 \leq p < \infty$ die integrierbaren Stufenfunktionen auf unserem Raum dicht im Raum der L^p-Funktionen. *(Hinweis: Man approximiere punktweise mit Stufenfunktionen. . .)*

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Sei (X, μ) ein Maßraum und $p, q \in [1, \infty]$ mit $p > q$. Man zeige:

(i) Wenn $\mu(X) < \infty$ und $p > q$, dann liefert die Inklusion eine stetige Abbildung $\mathrm{L}^p(X) \hookrightarrow \mathrm{L}^q(X)$.

(ii) Im Allgemeinen gilt weder $\mathrm{L}^p(X) \subseteq \mathrm{L}^q(X)$ noch $\mathrm{L}^q(X) \subseteq \mathrm{L}^p(X)$.

Aufgabe 4 (3 Punkte)**.** Sei $(e_i)_{i \in I}$ eine Hilbertbasis eines Hilbertraums $\mathcal{H}$. Man zeige

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i \in I} \langle f, e_i \rangle \langle e_i, g \rangle \qquad \text{für alle } f, g \in \mathcal{H}.$$

Aufgabe 5 (2 Punkte)**.** Man zeige, daß ein unendlichdimensionaler Hilbertraum keine Orthonormalbasis im Sinne der linearen Algebra besitzen kann.

Abgabefrist: Donnerstag, den 21. Januar zu Beginn der Vorlesung.