Prof. Dr. Wolfgang Soergel
Dr. Antonio Sartori

Universität Freiburg
WS 2015/16

Übungen zu Analysis III – Blatt 11

Aufgabe 1 (4 Punkte). (i) Man berechne die Fourierreihe von $f\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$.

(ii) Man folgere die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Aufgabe 2 (2 Punkte). Sei $(v_i)_{i\in I}$ eine summierbare Familie von Vektoren eines normierten Vektorraums V mit $s = \sum_{i\in I} v_i$. Man zeige, dass es eine höchstens abzählbare Teilmenge $J \subseteq I$ gibt, mit $v_i = 0$ für alle $i \notin J$.

Aufgabe 3 (2 Punkte). Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $V \subseteq \mathcal{H}$ ein abgeschlossener Untervektorraum mit Hilbertbasis $(e_i)_{i\in I} \subset V$. Man zeige: die orthogonale Projektion $\mathcal{H} \to V$ wird gegeben durch $v \mapsto \sum_{i\in I} \langle e_i, v_i\rangle e_i$.

Aufgabe 4 (4 Punkte). Gegeben topologische Gruppen G, H zeige man, dass die durch $\chi \mapsto (\chi \circ \mathrm{in}_1, \chi \circ \mathrm{in}_2)$ gegebene Abbildung ein Gruppenisomorphismus $\mathfrak{X}(G \times H) \to \mathfrak{X}(G) \times \mathfrak{X}(H)$ ist. (Hier bezeichnen $\mathrm{in}_1\colon G \to G \times H$ und $\mathrm{in}_2\colon H \to G \times H$ die natürlichen Inklusionen.)

Aufgabe 5 (4 Punkte). Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine beschränkte $\mathcal{C}^1$-berandete Teilmenge, und sei $\gamma\colon [0,2\pi] \to \partial U$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ ein stetig differenzierbarer Weg, der ∂U mit konstanter Geschwindigkeit parametrisiert. Seien $c_\nu = \langle e^{\mathrm{i}\nu t}, x(t)\rangle$ und $d_\nu = \langle e^{\mathrm{i}\nu t}, y(t)\rangle$ die Fourier-Koeffizienten von x und y.

(i) Man zeige für die Länge L von ∂U die Gleichung

$$\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \nu^2 \big(|c_\nu|^2 + |d_\nu|^2 \big).$$

(Hinweis: man benutze die Formel für die Fourier-Koeffizienten von $x'(t)$ und $y'(t)$.)

(ii) Mit Hilfe der Green'schen Formel und der Aufgabe 4 auf dem Blatt 10 zeige man für die Fläche A von U die Gleichung

$$A = \pi \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} i\nu(\overline{c_\nu} d_\nu - c_\nu \overline{d_\nu}).$$

(iii) Man folgere

$$L^2 - 4\pi A = 2\pi^2 \sum_{\nu\neq 0} \big(|\nu c_\nu - i d_\nu|^2 + |\nu d_\nu + i c_\nu|^2 + (\nu^2 - 1)(|c_\nu|^2 + |d_\nu|^2) \big).$$

(iv) Man folgere die **isoperimetrische Ungleichung** $L^2 \geq 4\pi A$, und man zeige, dass die Gleichung $L^2 = 4\pi A$ gilt genau dann, wenn γ ein Kreis ist.

Abgabefrist: Donnerstag, den 28. Januar zu Beginn der Vorlesung.