Prof. Dr. Wolfgang Soergel
Dr. Antonio Sartori

Universität Freiburg
WS 2015/16

Übungen zu Analysis III – Blatt 12

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Man finde stetige Funktionen auf den multiplikativen Gruppen von $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$, derart, dass ihr Produkt mit dem eingeschränkten Lebesguemass jeweils ein Haarmass ist.

Aufgabe 2 (3 Punkte)**.** Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, und $l\colon \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ eine Linearform. Man zeige: l ist stetig genau dann, wenn $\sup_{\|v\|\leq 1} l(v) < \infty$. In diesem Fall gilt $\sup_{\|v\|\leq 1} l(v) = \|x\|$, wobei $l(v) = \langle x, v \rangle$ nach dem Riesz'schen Darstellungsatz.

Aufgabe 3 (3 Punkte)**.** Man berechne die Fouriertransformierte der Rechtecksfunktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, die gegeben wird durch die Vorschrift $f(x) = 1$ für $|x| \leq 1$ und Null sonst.

Aufgabe 4 (3 Punkte)**.** Man zeige, daß eine nichttriviale partielle Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten im Schwarzraum keine nichttriviale Lösung haben kann.

Aufgabe 5 (3 Punkte)**.** Wir betrachten in dieser Übung der Einfachkeit halber nur Funktionen auf der reellen Zahlengeraden. Man zeige: Die Fouriertransformierte einer geraden Funktion ist gerade; die Fouriertransformierte einer ungeraden Funktion ist ungerade. Die Fouriertransformierte einer geraden reellwertigen Funktion ist reellwertig; die Fouriertransformierte einer ungeraden reellwertigen Funktion nimmt nur rein imaginäre Werte an. Schreiben wir eine integrierbare Funktion f als Summe $f = g + u$ ihres geraden und ihres ungeraden Anteils, so gilt $g^\wedge(y) = (2\pi)^{-1/2} \int f(x) \cos(xy) dx$ und $iu^\wedge(y) = (2\pi)^{-1/2} \int f(x) \sin(xy) dx$.

Diese beiden Integrale, aufgefaßt als Funktionen von y, sind auch bekannt als die **Cosinustransformation** *und die* **Sinustransformation** *von f. Sie haben den Vorteil, reelle Funktionen wieder zu reellen Funktionen zu machen, und ihre diskreten Analoga sind von großer technischer Bedeutung.*

Aufgabe 6 (4 Bonuspunkte)**.** Sei $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, und sei $\chi_m\colon G \to \mathbb{C}$, $\chi_m(p) = e^{2\pi i p/n}$.

(i) Man zeige: $\mathfrak{X}(G) = \{\chi_m \mid m \in \{0, \ldots, n-1\}\}$, und mit der natürlichen Gruppenstruktur auf den Charakteren gilt $\mathfrak{X}(G) \cong G$.

(ii) Wir identifizieren $L^2(G;\mu)$ und $L^2(\hat{G})$ auf natürlicher Weise mit $\mathbb{C}^n$. Man zeige, dass die diskrete Fouriertransformation $L^2(\hat{G}) \to L^2(G;\mu)$ gegeben wird durch die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} \zeta^{0\cdot 0} & \zeta^{0\cdot 1} & \cdots & \zeta^{0\cdot(n-1)} \\ \zeta^{1\cdot 0} & \zeta^{1\cdot 1} & \cdots & \zeta^{1\cdot(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta^{(n-1)\cdot 0} & \zeta^{(n-1)\cdot 1} & \cdots & \zeta^{(n-1)\cdot(n-1)} \end{pmatrix}, \qquad \text{wobei } \zeta = e^{2\pi i/n}.$$

(iii) Man zeige: $MM^* = M^*M = nE$.

Abgabefrist: Donnerstag, den 4. Februar zu Beginn der Vorlesung.