Prof. Dr. Wolfgang Soergel
Dr. Antonio Sartori

Universität Freiburg
WS 2015/16

Übungen zu Analysis III – Blatt 2

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Sei $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Man zeige, dass der Graph $\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{m+n} \mid x \in \mathbb{R}^m\}$ von f eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{m+n}$ ist.

Umgekehrt sei $M \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ eine Untermannigfaltigkeit der Dimension m. Dann ist M lokal der Graph einer stetigen differenzierbaren Abbildung (also: für jeden $x \in M$ gibt es eine offene Umgebung U von x in $\mathbb{R}^{m+n}$, eine Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_{m+n}$ der Koordinaten, und eine stetig differenzierbare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^m \supseteq V \to \mathbb{R}^n$ so dass gilt $M \cap U = \sigma(\Gamma(f))$).

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Seien $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein kompakter Quader und $A \subset Q$ eine abgeschlossene Teilmenge und $f : Q \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ stetig mit $f|_A = 0$. So gilt

$$\int_Q f = \sup_\alpha \int_Q \alpha f$$

mit dem Supremum gebildet über alle stetigen $\alpha : Q \to [0,1]$ mit $\operatorname{supp} \alpha \cap A = \emptyset$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Eine kompakte Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ heißt eine **kompakte Nullmenge**, wenn gilt $0 = \lim_{l \searrow 0} l^n |\{q \in \mathbb{Z}^n \mid K \cap l(q + [0,1]^n) \neq \emptyset\}|$. Man zeige für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ stetig mit kompaktem Träger und $N \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Nullmenge die Gleichheit

$$\int f = \sup\{\int \alpha f \mid \alpha \in \mathcal{C}_!(\mathbb{R}^n, [0,1]) \text{ mit } (\operatorname{supp} \alpha) \cap N = \emptyset\}$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Gegeben $M \subset X$ eine Mannigfaltigkeit in einem endlichdimensionalen reellen affinen Raum X und $p \in M$ ein Punkt zeige man, daß für je zwei Karten um p, sagen wir $\varphi : W \to M$ mit $\varphi(w) = p$ und $\psi : V \to M$ mit $\varphi(v) = p$ gilt $\operatorname{im}(\mathrm{d}_w \varphi) = \operatorname{im}(\mathrm{d}_v \psi)$. Dieser Untervektorraum von $\vec{X}$ heißt der **Tangentialraum an** M **in** p und wird $\mathrm{T}_p M$ notiert.

Abgabefrist: Donnerstag, den 29. Oktober vor dem Anfang der Vorlesung.