Prof. Dr. Wolfgang Soergel
Dr. Antonio Sartori

Universität Freiburg
WS 2015/16

Übungen zu Analysis III – Blatt 3

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f\colon [a,b] \to (0,\infty)$ stetig differenzierbar. Man zeige: Die Mantelfläche $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = f(z)^2\}$ ist eine zweidimensionale Fastmannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^3$ mit der Fläche

$$\int_M \sigma = 2\pi \int_a^b f(z)\sqrt{1 + (f'(z))^2}\,\mathrm{d}z.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Man zeige: Gegeben ein stetig differenzierbare Abbildung $f : [0,1]^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ ist ihr Bild $f([0,1]^n)$ eine kompakte Nullmenge.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Sei $B_n = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{p}\| \le 1\}$ die n-dimensionale Kugel vom Radius 1. Gegeben eine surjektive Integrationskarte $\phi : Q \to B_n$ erhält man eine surjektive Integrationskarte $\Phi : [0,\pi/2] \times [0,2\pi] \times Q \to B_{n+2}$ durch die Abbildungsvorschrift

$$\Phi\colon (\vartheta, \varphi, q) \mapsto (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \phi(q)\cos\vartheta).$$

Man folgere folgende Rekursionsformel für das Volumen V_n von B_n:

$$V_n = \frac{2\pi}{n} V_{n-2}.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Unter der Inversion am Einheitskreis $\mathbb{R}^2\backslash 0 \to \mathbb{R}^2\backslash 0$, $(x,y) \mapsto (u,v) = (x^2+y^2)^{-1}(x,y)$ berechne man die Verwandten des Vektorfelds ∂_x und des Kovektorfelds $\mathrm{d}x$.

Abgabefrist: Donnerstag, den 12. November vor dem Anfang der Vorlesung.