Prof. Dr. Wolfgang Soergel
Dr. Antonio Sartori

Universität Freiburg
WS 2015/16

Übungen zu Analysis III – Blatt 4

Aufgabe 1 (3+3 Punkte)**.** Sei $\varphi\colon \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \setminus 0$ die Abbildung $(r, \theta) \mapsto (x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.

(i) Man zeige: $\mathrm{d}\theta$ ist φ-Verwandt zum Kovektorfeld

$$\omega = \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2 + y^2}.$$

(ii) Man beweise: Das Integrale über jeden stetig differenzierbaren geschlossenen Weg in $\mathbb{R}^2 \backslash 0$ von ω liegt in $2\pi\mathbb{Z}$. *(Hinweis: Man benutze die Verträglichkeit des Wegintegrals mit Verwandtschaft zusammen mit dem Satz 5.3.5 3.)*

Aufgabe 2 (3+3 Punkte)**.** (i) Sei $R(x, y) \in \mathbb{C}(x, y)$ eine rationale Funktion in zwei Veränderlichen (d.h. der Quotient zweier Polynome). Seien $-\pi < a \leq b < \pi$, und sei $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2, \theta \mapsto (\cos\theta, \sin\theta)$ der Weg, der das zugehörige Kreisstück durchläuft. Man zeige:

$$(\dagger) \qquad \int_a^b R(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta = \oint_\gamma R(x, y)\,\frac{\mathrm{d}x}{y}$$

(ii) Mit Hilfe der Parametrisierung $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$,

$$\phi\colon t \longmapsto \left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \frac{2t}{1 + t^2}\right),$$

des Kreises kann man jedes der Integrale aus $(\dagger)$ zum Integral einer rationalen Funktion umschreiben. Man berechne so

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{\pi/2 - \varepsilon} \frac{1}{\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Sei k ein Körper und sei $\varphi \in \mathrm{Hom}(k^4, k^3)$ die lineare Abbildung definiert durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Man bestimme die Matrix von $\varphi^\top\colon \mathrm{Alt}^2 k^3 \to \mathrm{Alt}^2 k^4$ bezüglich der Basis der $\{f_i \wedge f_j\}$ mit f_i dual zur Standardbasis von k^4 beziehungsweise k^3.

Abgabefrist: Donnerstag, den 19. November vor dem Anfang der Vorlesung.