Prof. Dr. Wolfgang Soergel
Dr. Antonio Sartori

Universität Freiburg
WS 2015/16

Übungen zu Analysis III – Blatt 5

Aufgabe 1 (4 Punkte). (i) Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Man zeige: der Tangentialraum $\mathrm{T}_p M$ ist die Menge aller möglichen Geschwindigkeitsvektoren bei p von in M verlaufenden und bei p differenzierbaren Wegen, in Formel:

$$\mathrm{T}_p M = \{\gamma'(0) \mid \gamma\colon (-\epsilon, \epsilon) \to M,\ \gamma(0) = p,\ \gamma \text{ differenzierbar}\}. \qquad (\dagger)$$

(ii) Man zeige, dass für die Sphäre $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ gilt $\mathrm{T}_p M = \langle p \rangle^{\perp}$. *(Hinweis: sei γ wie in $(\dagger)$. Man leite die Gleichung $\langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle = 1$ ab.)*

Aufgabe 2 (4 Punkte). Sei $M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension n.

(i) Man zeige: M ist orientierbar genau dann, wenn M ein stetiges auf jeder Stelle von Null verschiedenes Normalfeld hat (d.h. es existiert ein $N\colon M \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ stetig mit der Eigenschaft $N_p \perp \mathrm{T}_p M$ für alle $p \in M$).

(ii) Man zeige, dass die Sphäre S^n orientierbar ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte). Sei $Q \subset \mathbb{R}^2$ ein kompakter Quader, und sei γ ein Weg, der den Rand von Q linksherum parametrisiert. Man zeige für alle stetig differenzierbaren Funktionen $f, g\colon Q \to \mathbb{R}$ die Gleichung

$$\int_\gamma f(x,y)\,\mathrm{d}x + g(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_Q \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{d}g \wedge \mathrm{d}y.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte). Sei M das Paraboloid-Stück $M = \{(x, y, z \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1 - x^2 - y^2, z \geq 0)\}$, und sei $F\colon M \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld $F(x,y,z) = (x,y,z)$.

1. Man berechne die zugehörige alternierende Bilinearform ω_F.
2. Man zeige, dass $N\colon M \to \mathbb{R}^3$, $N(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}(2x, 2y, 1)$ ein Normalenfeld auf M definiert.
3. Man berechne $\int_{\vec{M}} \omega_F$, wobei die Orientierung auf M zu dem Normalenfeld N korrespondiert.
4. Man berechne $\int_M \langle F, N \rangle$ und man prüfe die Identität $\int_{\vec{M}} \omega_F = \int_M \langle F, N \rangle$.

Abgabefrist: Donnerstag, den 26. November vor dem Anfang der Vorlesung.