Prof. Dr. Wolfgang Soergel
Dr. Antonio Sartori

Universität Freiburg
WS 2015/16

# Übungen zu Analysis III – Blatt 6

**Aufgabe 1** (4 Punkte)**.** Man berechne mit der Green'schen Formel die Fläche eines ebenen Rechtecks.

**Aufgabe 2** (4 Punkte)**.** Sei $S$ die Fläche $S = \{z = x(1-x)y(1-y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

(i) Man zeige, dass $S$ eine Eckfaltigkeit ist.

(ii) Man berechne mit Hilfe des Satzes von Stokes das Integral $\int_S x dx \wedge dy$.

**Aufgabe 3** (4 Punkte)**.** Aus dem Stokes'schen Satz mit Ecken extrahiere man im Fall einer stetig differenzierbaren 2-Form $\omega$ für $\vec{v}_0, \vec{v}_1, \vec{v}_2$ linear unabhängige Richtungsvektoren die Formel

$$(d\omega)_x(\vec{v}_0, \vec{v}_1, \vec{v}_2) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t^3} \int_{F(x, t\vec{v}_0, t\vec{v}_1, t\vec{v}_2)} \omega$$

mit $F$ der in geeigneter Weise orientierte Oberfläche eines Parallelpipeds mit Ecke $x$ und Kantenvektoren $t\vec{v}_i$, über die wir dann unsere 2-Form integrieren.

**Aufgabe 4** (4 Punkte)**.** Bezeichen $x, y, z, t$ auf $\mathbb{R}^4$ die Koordinaten der Raumzeit und seien $E = (E^x, E^y, E^z)$, $B = (B^x, B^y, B^z)$ das elektrische und magnetische Feld – die sind per Annahme immer stetig differenzierbar. Man definiert den elektromagnetischen Feldtensor als die 2-Form

$$F = E^x dx \wedge dt + E^y dy \wedge dt + E^z dz \wedge dt + B^x dy \wedge dz + B^y dz \wedge dx + B^z dx \wedge dy.$$

Man zeige, dass die Gleichung $dF = 0$ äquivalent ist zu den beiden Maxwellschen Gleichungen

$$\operatorname{div} B = 0 \qquad \text{und} \qquad \operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t},$$

wobei $\operatorname{div} A = \partial_x A^x + \partial_y A^y + \partial_z A^z$ und $\operatorname{rot} A = (\partial_y A^z - \partial_z A^y, \partial_z A^x - \partial_x A^z, \partial_x A^y - \partial_y A^x)$. Man berechne den Verwandten von $F$ unter der Lorentz-Transformation

$$x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma(t - vx) \qquad \text{wobei } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}$$

(hier haben wir für die Lichtgeschwindigkeit $c = 1$ gesetzt) und man folgere Formeln für die zugehörige Lorentz-Transformationen des elektrischen und magnetischen Feldes. *Scholium: Die beiden anderen Maxwell'schen Gleichungen im Vakuum sind $d(*F) = 0$ für $*$ den sogenannten Hodge-Operator zur Lorentz-Metrik, der hier nicht erklärt wird.*

Abgabefrist: Donnerstag, den 3. Dezember vor dem Anfang der Vorlesung.