Prof. Dr. Wolfgang Soergel
Dr. Antonio Sartori

Universität Freiburg
WS 2015/16

Übungen zu Analysis III – Blatt 7

Aufgabe 1 (3 Punkte)**.** Man zeige, dass alle folgende Mengensysteme die σ-Algebra aller Borelmengen von $\mathbb{R}$ erzeugen:

(a) Die halboffenen Intervalle $\{(a,b] \mid a,b \in \mathbb{R}\}$.

(b) Die offenen Intervalle mit rationalen Endpunkte $\{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{Q}\}$.

(c) Die offenen Halbgeraden $\{(a,\infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$.

(d) Alle Intervalle.

Aufgabe 2 (2 Punkte)**.** Sei $E \subseteq \mathbb{R}$ eine Borelmenge. Man zeige: $E+t = \{e+t \mid e \in E\}$ und $tE = \{te \mid e \in E\}$ sind Borelmengen für alle $t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ ein Mengenring und $\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ eine Abbildung mit $\mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B)$ für $A, B \in \mathcal{A}$ disjunkt. Man zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) μ ist σ-additiv alias ein Prämaß.

(ii) μ ist stetig auf aufsteigenden Folgen, als da heißt: Für jede Mengenfolge $A_n \in \mathcal{A}$ mit $A_n \subseteq A_{n+1}$ und $\bigcup A_n = A \in \mathcal{A}$ gilt $\lim \mu(A_n) = \mu(A)$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Sei $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum. Man zeige, dass das Mengensystem

$$\mathcal{M}^* := \{Y \subseteq X \mid \text{Es existieren } A, B \in \mathcal{A} \text{ mit } \mu(A \backslash B) = 0 \text{ und } B \subseteq Y \subseteq A\}$$

eine σ-Algebra ist.

Aufgabe 5 (3 Punkte)**.** Für jedes $\epsilon > 0$ konstruiere man in $\mathbb{R}$ eine offene dichte Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}$ von Lebesguemaß $\lambda(X) < \epsilon$.

Abgabefrist: Donnerstag, den 10. Dezember vor dem Anfang der Vorlesung.