Prof. Dr. Wolfgang Soergel
Dr. Antonio Sartori

Universität Freiburg
WS 2015/16

Übungen zu Analysis III – Blatt 8

Aufgabe 1 (4 Punkte). Ist $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum und $A \in \mathcal{M}$, so erhalten wir in offensichtlicher Weise durch Einschränkung einen weiteren Maßraum $A, \mathcal{M}|_A, \mu|_A$.

Sei nun ein Meßraum X die Vereinigung einer Folge X_n meßbarer Teilmengen. Sei auf jeder unserer Mengen X_n ein Maß μ_n gegeben derart, dass gilt $\mu_n|_{X_n \cap X_m} = \mu_m|_{X_n \cap X_m}$ für alle m, n. Man zeige, dass es dann genau ein Maß μ auf X gibt mit $\mu_n = \mu|_{X_n}$ für alle n.

Aufgabe 2 (4 Punkte). Gegeben eine kompakte Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ folgere man aus der Regularität des Lebesguemaßes

$$\lambda(K) = \lim_{l \searrow 0} l^n \left|\{q \in l\mathbb{Z}^n \mid K \cap (q + [0, l]^n) \neq \varnothing\}\right|.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte). Zeigen Sie, dass es höchstens ein normiertes translationsinvariantes topologisches Maß λ auf $\mathbb{R}$ geben kann.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst $\lambda(\{a\}) = 0$ für alle $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie anschließend, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\lambda([0, 1/n]) = 1/n$. Erweitern Sie als nächstes die Aussage auf Intervalle mit rationalen Endpunkten und schließlich auf beliebige Intervalle. Wenden Sie dann den Satz über Maßfortsetzungen an.

Aufgabe 4 (2 Punkte). Sei $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum. Ein Element $x \in X$ heißt ein **Atom**, wenn $\mu(\{x\}) > 0$. Sei μ ein Borelmaß auf $\mathbb{R}$. Man zeige: μ hat keine Atome genau dann, wenn f_μ stetig ist.

Aufgabe 5 (2 Punkte). Man zeige: Alle monotonen Abbildungen $\mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ sind meßbar.

Aufgabe 6 (4 Bonuspunkte). In $\mathbb{R}$ sei $C_0 = [0, 1]$ und $C_{i+1} = \frac{1}{3}C_i \cup (\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C_i)$ für alle $i \geq 0$. Man definiert die **Cantor-Menge** $C = \bigcap_{i \geq 0} C_i$.

1) Man zeige: C ist nicht-leer, abgeschlossen, kompakt, mit leerem Inneren $C^\circ = \varnothing$ und vom Lebesgue-Maß Null.
2) Man zeige: $C = \{\sum_{i>0} \frac{a_i}{3^i} \mid a_i \in \{0, 2\}\}$ ist die Menge aller reellen Zahlen, die sich in der Basis Drei mit einer Null vor dem Komma und ohne die Ziffer Eins ausdrücken lassen.
3) Man konstruiere eine surjektive Abbildung $C \to [0, 1]$.
4) * Man folgere, dass die Mächtigkeit der Lebesgue-meßbaren Teilmengen von $\mathbb{R}$ mit der Mächtigkeit von $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ übereinstimmt.

Man kann zeigen, dass die Mächtigkeit der Borelschen σ-Algebra gleich der Mächtigkeit von $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist. Das heißt, daß viel mehr Lebesgue-meßbare Teilmengen gibt als Borel-meßbare Teilmengen.

Abgabefrist: Donnerstag, den 17. Dezember zu Beginn der Vorlesung.