Prof. Dr. Wolfgang Soergel
Dr. Antonio Sartori

Universität Freiburg
WS 2015/16

Seminar

Kategorientheorie und Quantengruppen

Vortrag 1: **Tensorprodukt**, Marius Zeinhofer. [21.10.15]

Definition (universelle Eigenschaft) und Konstruktion des Tensorprodukts von Vektorräumen ([Soeb, § 6.3] oder [Kas, II.1]) und des Tensorprodukts von Moduln ([Bou, § II.3.1-2 und 5] und/oder [Soec, § 4.2]). Assoziativität des Tensorprodukts ([Bou, § II.3.8]). Dualität, Evaluation und Coevaluation ([Kas, II.3]).

Vortrag 2: **Kategorien und Funktoren**, Nil-Jana Akpinar. [28.10.15]

In dem Vortrag sollen mit Hilfe von vielen Beispielen die grundlegenden Definitionen der Kategorientheorie eingeführt werden: Kategorien, Unterkategorien, Funktoren. Isomorphismen von Kategorien. Treue, volle und wesentlich surjektive Funktoren. Äquivalenz von Kategorien wie in [Soeb, Definition 7.2.17]. Produkt von Kategorien. Opponierte Kategorie und kontravariante Funktoren. Referenzen: [Kas, XI.1.1 und XI.1.2], [ML, I.3 und I.8] und [Soeb, § 7.2-3].

Vortrag 3: **Natürliche Transformationen**, Janna Meyer-Boyé (Bachelor). [4.11.15]

Definition von natürlicher Transformation ([Kas, XI.1.2], [ML, I.4] oder [Soeb, § 7.3]). Äquivalenz von Kategorien durch natürliche Transformationen ([Kas, Proposition XI.1.5]). Anwendung: Natürliche Konstruktionen in der Geometrie [Soeb, § 7.5].

Vortrag 4: **Das Lemma von Yoneda**, Halyna Müller-Krupennyk (Baccalaureus). [11.11.15]

Universelle Pfeile ([ML, Definition III.1]). Das Lemma von Yoneda ([ML, Lemma III.2], siehe auch [Soeb, Proposition 7.8.2]). Koprodukte und Kolimes ([ML, § III.3]). Produkte und Limes ([ML, § III.4]). Anwendung: Ind-Objekte und Pro-Objekte, explizite Beschreibung der Morphismen in derartigen Kategorien, Beispiele.

Vortrag 5: **Adjungierte Funktoren**, Timo Rambaum (Baccalaureus). [18.11.15]

Adjungierte Funktoren ([Kas, XI.1.3]). Hom-Tensor-Adjunktion ([Bou, II.4.1] und/oder [Soec, § 4.3.1]). Beispiel: Erweiterung und Einschränkung der Skalare ([Bou, II.5.1] und/oder [Soec, § 4.3]).

Vortrag 6: **Monoidale Kategorien**, Christian Marschner (Staatsexamen). [25.11.15]

Definition von monoidalen Kategorien / Tensorkategorien ([Kas, XI.2.1-2]). Monoidale Funktoren ([Kas, XI.4]). Strikte monoidale Kategorien ([Kas, Definition XI.2.1]); jede Monoidale Kategorie ist äquivalent zu einer strikten monoidalen Kategorie ([Kas, XI.5], ohne Beweis). Monoidale Kategorien als Multikategorien ([Lei, §§ 2.1 und 2.3]).

Vortrag 7: **Tannaka-Dualität für endliche Gruppen**, Roman Haak (Bachelor). [2.12.15]

Sei G eine endliche Gruppe. Die Kategorie $\mathrm{Rep}(G)$ der endlichdimensionalen Darstellungen von G ist ein natürliches Beispiel einer symmetrischen monoidalen Kategorie ([Kas, XIII.1.5]). Die Tannaka Dualität besagt, dass die Gruppe G von der monoidalen Kategorie $\mathrm{Rep}(G)$ eindeutig bestimmt ist. Hauptreferenz für den Vortrag ist [DM, Beispiel 1.24 und Kapitel 2]. Das Hauptresultat ist [DM, Proposition 2.8].

Vortrag 8: **Darstellungstheorie der $\mathfrak{sl}_2$**, Patrick Laun. [9.12.15]

Definition einer Lie Algebra ([Soea, Definition 1.1.2]) und ihrer Darstellungen (Operationen auf Vektorräumen wie in [Soea, Definition 1.2.3]). Die Lie Algebra $\mathfrak{sl}_2$ ([Kas, V.3, nur Seite 99]) und ihrer universelle einhüllende Algebra $U(\mathfrak{sl}_2)$ (nach [Kas, V.2, bis Example 1], im Fall von $\mathfrak{sl}_2$). Äquivalenz zwischen Darstellungen von $\mathfrak{sl}_2$ und Moduln über $U(\mathfrak{sl}_2)$ (nach [Soea, Lemma 4.3.8], nur für $\mathfrak{sl}_2$). Der PBW-Theorem für $\mathfrak{sl}_2$ ([Kas, Proposition V.3.2]), ohne Beweis. Konstruktion der endlich-dimensionalen Darstellungen ([Kas, Seiten 102 (Ende) und 103 (ohne Lemma V.4.5)]). Tensorprodukt von Darstellungen ([Kas, Gleichung (V.2.3)]) und die Komultiplikation von $U(\mathfrak{sl}_2)$ ([Kas, Paragraph vor Proposition V.2.4]). Bemerkung: die Kategorie der endlich dimensionalen Darstellungen der $\mathfrak{sl}_2$ ist eine symmetrische monoidale Kategorie. Alles soll möglichst explizit und nur im Fall von $\mathfrak{sl}_2$ erklärt werden.

Vortrag 9: **Die Quantengruppe $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ und ihre Darstellungen**, Thomas Spittler. [16.12.15]

In dem Votrag soll die Quantengruppe zu $\mathfrak{sl}_2$ eingeführt werden ([Kas, VI.1]) und deren endlich-dimensionale Darstellungen klassifiziert ([Kas, VI.3]). Wenn die Zeit reicht, kann vielleicht auch die Beziehung zu $U(\mathfrak{sl}_2)$ kurz besprochen werden ([Kas, VI.2]).

Vortrag 10: **Die Hopf-Algebra Struktur auf $U_q(\mathfrak{sl}_2)$**, Daniel Laun. [23.12.15]

Duale Objekte in monoidalen Kategorien ([Kas, XIV.2]). Bialgebren und Hopf-Algebren ([Jan, § 3.8]). Die Modulkategorie über einer Hopf-Algebra ist eine monoidale Kategorie mit Dualen (aus [Jan, Kapitel 3]). Die Hopf-Algebra Struktur auf $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ ([Jan, §§ 3.1-9]).

Vortrag 11: **Die Ribbon-Kategorie der Tangles**, Eva-Maria Müller. [13.01.16]

Verzopfte Kategorien und Ribbon-Kategorien. Die Kategorie der Tangles als universelle Ribbon-Kategorie. Als Referenzen können das kompakte [Tur, §§ 1.2-4 und §§ 2.3-5] und das viel ausführlichere [Kas, XIII.1, XIV.2-3 und XIV.5.1] benutzt werden. Hauptresultat soll der Theorem 2.5 in [Tur] (oder der Theorem XIV.5.1 in [Kas]).

Vortrag 12: **Das Drinfeld-Zentrum**, Tobias Engler (Bachelor). [20.01.16]

Definition vom Drinfeld-Zentrum einer monoidalen Kategorie ([EGNO, § 7.13, nur Seite 162]). Das Drinfeld-Zentrum ist eine verzopfte Kategorie ([EGNO, Proposition 8.5.1]). Das *quantum double* $D(H)$ ([EGNO, Definition 7.14.5]) einer endlichdimensionalen Hopf Algebra H ist eine verzopfte (*quasitriangular*) Hopf Algebra ([EGNO, Proposition 8.3.8]). Ist nun $\mathcal{C} = \mathrm{Rep}(H)$ die Kategorie der endlichdimensionalen H-Moduln, so ist das Drinfeld-Zentrum von $\mathcal{C}$ auf natürlicher Weise äquivalent zu $\mathrm{Rep}(D(H))$ ([EGNO, § 7.14]). Anwendung: die R-Matrix endlich-dimensionaler Quozienten von $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ ([Kas, IX.6]).

Vortrag 13: **Die universelle R-Matrix, *alias* die verzopfte Struktur der Darstellungen von $U_q(\mathfrak{sl}_2)$**, Vivien Vogelmann (Bachelor). [27.01.16]

In dem Vortrag soll erklärt werden, wie die universelle R-matrix ([Kas, Theorem XVII.4.2] oder [Jan, page 39]) die Struktur einer verzopften (und sogar ribbon) Kategorie auf die Darstellungen von $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ induziert. Man folge z.B. [Jan, §§ 3.11-18].

Vortrag 14: **Knoteninvarianten und das Jones Polynom**, Pascal Schade (Zulassung). [3.02.16]

Knoten und Links, Linkdiagramme (Zusammenfassung aus [Kas, X.1-3]). Links sind Endomorphismen der monoidalen Einheit in der Kategorie der Tangles. Die universelle Eigenschaft der Ribbon-Kategorie der Tangles zusammen mit der Ribbon-Struktur der Darstellungen der $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ liefern eine Linkinvariante zu jeder Darstellung von $U_q(\mathfrak{sl}_2)$. Für die (zwei-dimensionale) Darstellung V kann man explizit die R-Matrix auf $V \otimes V$, und somit die Linkinvariante, ausrechnen. Auf dieser Weise bekommt man das Jones-Polynom ([Kas, X.4]).

Vortrag 15: **Die Knizhnik-Zamolodchikov-Gleichungen und das Theorem von Drinfeld-Kohno**, Fabian Lehmann. [10.02.16]

In dem Vortrag soll ein alternativer Weg zur Beschreibung der verzopften Struktur der $U_q(\mathfrak{sl}_2)$–Darstellungen vorgestellt werden. Gegeben ein flacher Zusammenhang ([Kas, XIX.1]) auf einem Vektorbündel einer Mannigfaltigkeit, man erhält eine Darstellung ihrer Fundamentalgruppe durch Monodromie ([Kas, XIX.2]). Die Knizhnik-Zamolodchikov-Gleichungen definieren einen flachen Zusammenhang auf dem trivialen Vektorbündel mit Faser $V^{\otimes n}$ über dem Raum $Y_n = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid z_i \neq z_j \text{ für alle } i \neq j\}$, wobei V die natürliche Darstellung von $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ ist. Somit erhält man eine Darstellungen der Zopfgruppe ([Kas, XIX.3]). Der Theorem von Drinfeld-Kohno ([Kas, XIX.4.1], wahrscheinlich ohne Beweis) besagt, dass diese Konstruktion nichts anders als die verzöpfte Struktur von $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ auf $V^{\otimes n}$ ist.

Literatur

[Bou] N. Bourbaki, *Algebra I. Chapters 1–3*, Elements of Mathematics (Berlin), Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[DM] P. Deligne and J. S. Milne, *Tannakian categories*, online verfügbar: `http://www.jmilne.org/math/xnotes/tc.pdf`.

[EGNO] P. Etingof, S. Gelaki, D. Nikshych, and V. Ostrik, *Tensor categories*, Mathematical surveys and monographs, vol. 205, American Mathematical Society, 2015, online verfügbar auf der Webseite von P. Etingof: `http://www-math.mit.edu/~etingof`.

[Jan] J. C. Jantzen, *Lectures on quantum groups*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 6, American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.

[Kas] C. Kassel, *Quantum groups*, Algebra and operator theory (Tashkent, 1997), Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998, pp. 213–236.

[Lei] T. Leinster, *Higher operads, higher categories*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 298, Cambridge University Press, Cambridge, 2004, online verfügbar auf ArXiv: `http://arxiv.org/pdf/math/0305049v1.pdf`.

[ML] S. Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 5, Springer-Verlag, New York, 1998.

[Soea] W. Soergel, *Lie Algebren*, online verfügbar `http://home.mathematik.uni-freiburg.de/soergel/Skripten/XXLieA.pdf`.

[Soeb] ———, *Lineare Algebra II*, online verfügbar `http://home.mathematik.uni-freiburg.de/soergel/Skripten/XXLA2.pdf`.

[Soec] ———, *Singuläre Homologie*, online verfügbar `http://home.mathematik.uni-freiburg.de/soergel/Skripten/XXTS.pdf`.

[Tur] V. G. Turaev, *Quantum invariants of knots and 3-manifolds*, revised ed., de Gruyter Studies in Mathematics, vol. 18, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2010.