PD Dr. Markus Junker | Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Übungen: Charlotte Bartnick | Sommersemester 2023

Mathematische Logik

Blatt 11

Abgabe: 10.07.2023, 18 Uhr

Aufgabe 1 (3 Punkte)**.**

Die Bellschen Zahlen B_n geben die Anzahl der Partitionen einer n-elementigen Menge an. Eine Partition einer Menge ist eine Aufteilung in disjunkte Teilmengen. Beispielsweise gilt $B_3 = 5$, da sich eine 3-elementige Menge $\{1,2,3\}$ auf 5 verschiedene Arten zerlegen lässt (nämlich in die Einermengen $\{1\},\{2\},\{3\}$ oder in die Menge $\{1,2,3\}$ oder auf drei verschieden Arten in eine ein- und eine zweielementige Menge).
Man definiert zudem $B_0 = 1$, dann gilt nämlich die folgende Rekursionformel: $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$. (Überlegen Sie sich, warum die Formel gilt!)

Beweisen Sie sauber, dass die Funktion $n \mapsto B_n$ primitiv rekursiv ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.**

a) Zeigen Sie, dass die Funktion
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N} \\ (k,n) & \mapsto & \langle k, x_0, \ldots, x_m\rangle, \quad \text{wobei } n = \langle x_0, \ldots, x_m\rangle \end{array}$$
primitiv rekursiv ist.

b) Sei nun $\mathscr{L}$ eine feste endliche Sprache. Zeigen Sie, dass die Funktion
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & \begin{cases} \ulcorner \neg\varphi \urcorner, & \text{falls } n = \ulcorner \varphi \urcorner \text{ mit } \varphi \text{ eine } \mathscr{L}\text{-Formel.} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \end{array}$$
primitiv rekursiv ist.

Aufgabe 3 (2 Punkte)**.**

Wir erweitern eine entscheidbare Theorie T um ein weiteres Axiom ϕ. Begründen Sie, warum die Theorie $T \cup \{\phi\}$ auch entscheidbar ist. Sie müssen keine Details beweisen.

(Hieraus folgt, dass jede Erweiterung einer entscheidbaren Theorie T um endlich viele Axiome wieder entscheidbar ist.)

Aufgabe 4 (7 Punkte)**.**

Wir betrachten die endliche Sprache $\mathscr{L} = \{E\}$, welche aus einem zweistelligen Relationszeichen E besteht.

Für jede natürliche Zahl $k \geq 1$ sei T_k die $\mathscr{L}$-Theorie, deren Modelle genau die $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{A}$ sind, in denen $E^{\mathcal{A}}$ eine Äquivalenzrelation auf A ist mit genau k vielen Äquivalenzklassen, und sämtliche Äquivalenzklassen sind unendlich. Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass die Theorie T_k für jedes k vollständig ist.

a) Zeigen Sie, dass T_k rekursiv axiomatisierbar ist. Insbesondere ist T_k entscheidbar.

(Bitte wenden!)

Sei nun T die $\mathcal{L}$-Theorie, deren Modelle genau die $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{A}$ sind, in denen $E^{\mathcal{A}}$ eine Äquivalenzrelation auf A ist mit höchstens zwei Äquivalenzklassen, und sämtliche Äquivalenzklassen sind unendlich.

b) Ist T rekursiv axiomatisierbar?

c) Gilt die Äquivalenz

$$T \vdash \chi \iff T_1 \vdash \chi \text{ und } T_2 \vdash \chi$$

für jede $\mathcal{L}$-Aussage χ?

d) Ist T entscheidbar? Ist T vollständig?

Die Übungsblätter können zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter nach Übungsgruppe entweder im Fach 3.02 oder 3.03 im Keller des mathematischen Instituts.