PD Dr. Markus Junker
Übungen: Charlotte Bartnick

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Sommersemester 2023

# Mathematische Logik

Blatt 12

Abgabe: 17.07.2023, 18 Uhr

*Anmerkung:* Die Hälfte der Aufgaben auf diesme Übungsblatt zählen in die zu ereichende Punktzahl hinein, die andere Hälfte sind Bonusaufgaben!

**Definition.** Eine $\mathscr{L}$-Formel heißt *existenziell*, wenn sie von der Form $\exists v_{i_1} \dots \exists v_{i_k} \varphi$ für eine quantorenfreie Formel $\varphi$ ist.

**Aufgabe 1** (4 Punkte)**.**

Zeigen Sie, dass alle in der vollen Arithmetik $\mathscr{N}$ mit quantorenfreien $\mathscr{L}_{\mathrm{Ar}}$-Formeln definierbaren Teilmengen von $\mathbb{N}^k$ primitiv rekursiv sind und alle mit existentiellen $\mathscr{L}_{\mathrm{Ar}}$-Formeln definierbaren Teilmengen rekursiv aufzählbar.

**Aufgabe 2** (4 Punkte)**.**

Die Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ wird zu einer $\mathscr{L}_{\mathrm{Ar}}$-Struktur $\mathscr{N}_2$ durch komponentenweise Addition, durch die Definitionen $(n, m) \cdot^{\mathscr{N}_2} (n', m') := (nm' + n', mm')$, $s^{\mathscr{N}_2}(n, m) = (n, m + 1)$ sowie $\underline{0}^{\mathscr{N}_2} = (0, 0)$ und mit der lexikografische Ordnung.

a) Zeigen Sie $\mathscr{N}_2 \models \mathsf{Q}$.

b) Zeigen Sie, dass $\mathsf{PA}$ beweist, dass die Ordnung $<$ diskret ist.

c) Folgern Sie $\mathscr{N}_2 \not\models \mathsf{PA}$.

**Bonusaufgabe 1** (2,5 Bonuspunkte)**.**

Wenn $r_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, jeweils rekursiv ist, ist dann auch $r : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $(m, n) \mapsto r_n(m)$ rekursiv? Begründen Sie Ihre Antwort.

**Hinweis**: Es gibt nicht-rekursive Teilmengen von $\mathbb{N}$.

**Bonusaufgabe 2** (3 Bonuspunkte)**.**

Sei $\mathscr{M} \models \mathsf{PA}$ und seien $m, m' \in M$ Nicht-Standard-Elemente mit $m <^{\mathscr{M}} m'$. Wir nennen das Element $m'$ *von $m$ aus erreichbar*, wenn $m'$ in endlich vielen Nachfolgerschritten aus $m$ entsteht, also $m' = s^{\mathscr{M}}(\dots s^{\mathscr{M}}(m) \dots)$.

Zeigen Sie: Wenn $m'$ von $m$ aus nicht erreichbar ist, dann gibt ein $m''$ mit $m <^{\mathscr{M}} m'' <^{\mathscr{M}} m'$, so dass weder $m''$ von $m$ aus erreichbar noch $m'$ von $m''$ aus erreichbar ist.

**Hinweis**: Benutzen Sie eine Instanz des Induktionsschemas aus $\mathsf{PA}$ für Formeln mit Parametern.

**Bonusaufgabe 3** (2,5 Bonuspunkte)**.**

Zeigen Sie, dass $\mathsf{PA}$ die Kommutativität der Multiplikation beweist, also

$$\mathsf{PA} \models \forall v_0 \forall v_1 \, v_0 \cdot v_1 \doteq v_1 \cdot v_0 \ .$$

---

Die Übungsblätter können zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter nach Übungsgruppe entweder im Fach 3.02 oder 3.03 im Keller des mathematischen Instituts.