PD Dr. Markus Junker
Übungen: Charlotte Bartnick

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Sommersemester 2023

Mathematische Logik

Blatt 2

Abgabe: 02.05.2023, 12 Uhr

Aufgabe 1 (3 Punkte)**.**

Geben Sie zu der aussagenlogischen Formel jeweils eine äquivalente Formel in disjunktiver Normalform an.

a) Unter Verwendung einer Wahrheitstafel: $((A_1 \leftrightarrow A_2) \vee A_1)$

b) Mittels elementarer logischer Umformungen: $(((A_1 \to (A_4 \vee A_3)) \to \bot) \vee (A_4 \to A_1))$

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.**

Beweisen Sie: Wenn φ und ψ aussagenlogische Formeln sind mit $\vdash (\varphi \to \psi)$, so gibt es eine aussagenlogische Formel χ mit $\vdash (\varphi \to \chi)$ und $\vdash (\chi \to \psi)$ derart, dass alle in χ vorkommenden Aussagenvariablen sowohl in φ als auch in ψ vorkommen.

Hinweis: Gewinnen Sie χ aus der kanonischen DNF von φ.

Aufgabe 3 (6 Punkte)**.**

Nach Vorlesung ist $\{\wedge, \neg\}$ ein vollständiges Junktorensystem. In dieser Aufgabe wollen wir andere vollständige Junktorensysteme betrachten.

a) Zeigen Sie mittels elementarer logischer Umformungen, dass $\{\bot, \to\}$ ein vollständiges Junktorensystem ist.

Wir können neue zweistellige Junktoren als Abkürzungen für komplexere aussagenlogische Formeln einführen. Beispielsweise betrachten wir den zweistelligen Junktor $\downarrow$, der als Abkürzung $(\varphi \downarrow \psi)$ für $\neg(\varphi \vee \psi)$ steht.

b) Zeigen Sie, dass sich $(A_1 \to A_2)$ als aussagenlogische Formel, in der kein anderer Junktor als $\downarrow$ vorkommt, darstellen lässt und geben Sie eine solche Formel an.

c) Sei $*$ ein beliebiger zweistelliger Junktor. Begründen Sie: Falls $\{*\}$ ein vollständiges Junktorensystem bildet, so muss schon $(A_1 * A_1) \sim \neg A_1$ gelten.

   Hinweis: Betrachten Sie mögliche Werte für $\tilde{*}(0,0)$ und $\tilde{*}(1,1)$.

d) Folgern Sie, dass $\{\downarrow\}$ ein vollständiges Junktorensystem bildet.

e) **Bonusfrage** (2 Bonuspunkte) Statt über Formeln und logische Äquvialenz zu sprechen, kann man den Begriff vollständiges Junktorensystem auch als Eigenschaft der zu den Junktoren gehörigen Wahrheitswertfunktionen definieren: Die Menge von Junktoren $\{*_1, \dots *_n\}$ ist vollständig, falls sich für jedes $n \geq 1$ jede mögliche Wahrheitsfunktion $\{0,1\}^n \to \{0,1\}$ mit Hilfe der Wahrheitsfunktionen $\tilde{*_1}, \dots, \tilde{*_1}$ "darstellen" lässt. Finden Sie eine mathematische Formulierung, was "darstellen" bedeutet.

(Bitte wenden!)

Aufgabe 4 (3 Punkte).

Sei K_n der vollständiger Graph mit n Ecken. Dies bedeuten, dass jedes Paar von Ecken $i < j$ durch genau eine Kante K_{ij} verbunden ist. Für jede Kante K_{ij} sei eine Aussagenvariable A_{ij} gegeben. Die Kanten werden nun entweder blau oder rot gefärbt. Eine solche Färbung lässt sich als Belegung β der Aussagenvariablen A_{ij} (für alle $i < j$) mit Wahrheitswerten codieren (wie?).

a) Geben Sie für beliebiges n eine aussagenlogische Formel φ_n mit der folgenden Eigenschaft an: Für jede Belegung β gilt (unter der obigen Korrespondenz), dass $\beta(\varphi_n) = 1$[1] genau dann, wenn in der Färbung von K_n ein monochromes Dreieck existiert, d.h. drei Punkte deren gemeinsame Kanten alle dieselbe Farbe haben.

b) Gibt es eine Belegung β derart, dass $\beta(\varphi_4) = 0$?

Anmerkung: Es lässt sich zeigen, dass φ_6 eine Tautologie ist. Mit anderen Worten existiert für jede Färbung der Kanten von K_6 ein rotes oder blaues Dreieck.

Die Übungsblätter können zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter nach Übungsgruppe entweder im Fach 3.02 oder 3.03 im Keller des mathematischen Instituts.

[1] Gegeben eine aussagenlogische Formel φ und eine Belegung β der Aussagenvariablen mit Wahrheitswerten sei $\beta(\varphi)$ der Wert des Wahrheitswertverlaufs $\tilde{\varphi}$ unter den von β vorgegebenen Wahrheitswerten. Hierbei wird benutzt, dass der Wahrheitswertverlauf von φ nur von den in φ vorkommenden Aussagenvariablen abhängt.