PD Dr. Markus Junker
Übungen: Charlotte Bartnick

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Sommersemester 2023

Mathematische Logik

Blatt 3

Abgabe: 08.05.2023, 18 Uhr

Aufgabe 1 (5 Punkte)**.**

Sei $\mathscr{L} = \{+, *, -, c_0, c_1, <\}$ eine Sprache mit den zweistelligen Funktionszeichen $+$ und $*$, dem einstelligen Funktionszeichen $-$, den Konstantenzeichen c_0 und c_1 sowie dem zweistelligen Relationszeichen $<$.

a) Welche der folgenden Ausdrücke (in polnischer Notation) sind $\mathscr{L}$-Terme?
   i) $*v_3 + -v_2v_0v_1$
   ii) $< +v_1c_0 * v_1c_0$
   iii) $+ - c_0 * v_5 + v_7v_3$

b) Welche der folgenden Ausdrücke (in gemischter Notation) sind $\mathscr{L}$-Formeln?
   i) $*v_1 - c_1 \doteq *v_2 - c_0$
   ii) $\forall c_0(\neg c_1 \doteq c_0 \wedge +c_1c_1 \doteq v_2)$
   iii) $(\forall v_2\, c_0 \doteq v_3 \vee \exists v_0 \ < v_3 * v_0c_0)$

Nun sei $\mathscr{M}$ die $\mathscr{L}$-Struktur mit Universum $\mathbb{Q}$ und den Interpretationen $c_0^{\mathscr{M}} = 0$ und $c_1^{\mathscr{M}} = 1$, $+^{\mathscr{M}}, *^{\mathscr{M}}$ und $<^{\mathscr{M}}$ als Addition, Multiplikation und strikte Ordnung auf $\mathbb{Q}$ sowie $-^{\mathscr{M}}$ als Funktion $x \mapsto -x$. Weiter sei $\beta : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ die Belegung mit $\beta(i) = 2i$.

c) Berechnen Sie die Auswertungen $\beta(\tau)$ der folgenden $\mathscr{L}$-Terme.
   i) Für $\tau = *c_1 + c_0 + -c_1c_0$.
   ii) Für $\tau = + * v_1v_3 - v_2$.

d) Gilt $(\mathscr{M}, \beta) \models \exists v_2 \ * v_2v_2 \doteq v_1$?
   Gilt $(\mathscr{M}, \beta) \models < *c_0v_3 + +v_4 - c_1 - c_1$?

Definition. Seien $\mathscr{M}$ und $\mathscr{N}$ Strukturen in derselben Sprache $\mathscr{L}$. Eine Abbildung $F : M \to N$ zwischen den Universen von $\mathscr{M}$ und $\mathscr{N}$ heißt Isomorphismus, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- Die Abbildung F ist bijektiv.
- Für alle k-stelligen Funktionszeichen g aus $\mathscr{L}$ und alle $m_1, \ldots, m_k$ aus M ist $F(g^{\mathscr{M}}(m_1, \ldots, m_k)) = g^{\mathscr{N}}(F(m_1), \ldots, F(m_k))$.
- Für alle k-stelligen Relationszeichen R aus $\mathscr{L}$ und alle $m_1, \ldots, m_k$ aus M gilt $(m_1, \ldots, m_k) \in R^{\mathscr{M}}$ genau dann, wenn $(F(m_1), \ldots, F(m_k)) \in R^{\mathscr{N}}$.

Aufgabe 2 (3 Punkte)**.**

Beweisen oder widerlegen Sie jeweils, dass die folgenden Strukturen $\mathscr{M}$ und $\mathscr{N}$ isomorph sind.

a) In der Sprache $\mathscr{L} = \{e, \circ\}$, welche aus einem Konstantenzeichen e und einem zweistelligen Funktionszeichen $\circ$ besteht, die Struktur $\mathscr{M} = (\mathbb{R}, e^{\mathscr{M}}, \circ^{\mathscr{M}})$ mit Interpretationen $e^{\mathscr{M}} = 0$ und $\circ^{\mathscr{M}}$ der üblichen Addition sowie die Struktur $\mathscr{N} = (\mathbb{R}_{>0}, e^{\mathscr{N}}, \circ^{\mathscr{N}})$ mit Interpretationen $e^{\mathscr{N}} = 1$ und $\circ^{\mathscr{N}}$ als Multiplikation.

(Bitte wenden!)

b) Sei $\mathscr{L}' = \{c, <\}$ die Sprache mit einem Konstantenzeichen c und einem zweistelligen Relationszeichen $<$. Weiter sei $\mathscr{M} = (\mathbb{N}, c^{\mathscr{M}}, <^{\mathscr{M}})$ mit $c^{\mathscr{M}} = 2$ und $<^{\mathscr{M}}$ der üblichen strikten Ordnung sowie $\mathscr{N} = (\mathbb{N}, c^{\mathscr{N}}, <^{\mathscr{N}})$ mit $c^{\mathscr{N}} = 3$ und $<^{\mathscr{N}}$ wieder der strikten Ordnung auf $\mathbb{N}$.

c) In derselben Sprache $\mathscr{L}'$ aus Teil b) nun die Strukturen $\mathscr{M} = (\mathbb{Z}, c^{\mathscr{M}}, <^{\mathscr{M}})$ mit $c^{\mathscr{M}} = 2$ und $<^{\mathscr{M}}$ der üblichen strikten Ordnung sowie $\mathscr{N} = (\mathbb{Z}, c^{\mathscr{N}}, <^{\mathscr{N}})$ mit $c^{\mathscr{N}} = 3$ und $<^{\mathscr{N}}$ ebenfalls der strikten Ordnung auf $\mathbb{Z}$.

Aufgabe 3 (5 Punkte)**.**
Seien in der Sprache $\mathscr{L}$ die Strukturen $\mathscr{M}$ und $\mathscr{N}$ sowie ein Isomorphismus $F : M \to N$ gegeben. Zu einer Belegung $\beta : \mathbb{N} \to M$ sei $\beta_F := F \circ \beta$ die durch F auf N induzierte Belegung.

a) Zeigen Sie induktiv über den Aufbau der Terme, dass für jeden $\mathscr{L}$-Term τ und jede Belegung β auf M gilt $F(\beta(\tau)) = \beta_F(\tau)$.

b) Folgern Sie, dass für jede $\mathscr{L}$-Formel φ und jede Belegung $\beta : \mathbb{N} \to M$ gilt:

$$(\mathscr{M}, \beta) \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad (\mathscr{N}, \beta_F) \models \varphi$$

Aufgabe 4 (3 Punkte)**.**
Sei $\mathscr{L}$ die Sprache, welche aus zwei einstelligen Relationszeichen P_1 und P_2 besteht. Finden Sie zu den unten genannten Eigenschaften jeweils eine Aussage ψ (oder eine Menge von Aussagen T) derart, dass für jede $\mathscr{L}$-Struktur $\mathscr{M}$ gilt: $\mathscr{M} \models \psi$ (bzw. $\mathscr{M} \models \psi$ für alle ψ aus T) genau dann, wenn die Eigenschaft in $\mathscr{M}$ erfüllt ist.

a) Die Prädikate $P_1^{\mathscr{M}}$ und $P_2^{\mathscr{M}}$ überdecken ganz M, d.h. $M = P_1^{\mathscr{M}} \cup P_2^{\mathscr{M}}$

b) Es gilt $P_1^{\mathscr{M}} \cap P_2^{\mathscr{M}} = \emptyset$, d.h. die Prädikate sind disjunkt.

c) Die Menge $P_1^{\mathscr{M}}$ ist unendlich groß.

Die Übungsblätter können zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter nach Übungsgruppe entweder im Fach 3.02 oder 3.03 im Keller des mathematischen Instituts.