PD Dr. Markus Junker
Übungen: Charlotte Bartnick

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Sommersemester 2023

Mathematische Logik

Blatt 5

Abgabe: 22.05.2023, 18 Uhr

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.**

Sei $\mathscr{M}$ eine $\mathscr{L}$-Struktur. Die *vollständige Theorie* von $\mathscr{M}$ ist definiert als

$$\mathrm{Th}(\mathscr{M}) = \{\varphi \mid \varphi\ \mathscr{L}\text{-Aussage mit } \mathscr{M} \models \varphi\}$$

Es ist klar, dass die vollständige Theorie einer Struktur vollständig ist. Zwei $\mathscr{L}$-Strukturen $\mathscr{M}$ und $\mathscr{N}$ heißen *elementar äquivalent*, falls $\mathrm{Th}(\mathscr{M}) = \mathrm{Th}(\mathscr{N})$.

a) Zeigen Sie, dass isomorphe $\mathscr{L}$-Strukturen elementar äquivalent sind.

b) Sind $(\mathbb{Z}, <)$ und $(2\mathbb{Z}, <)$ elementar äquivalent als Strukturen in der Sprache $\mathscr{L} = \{R\}$ mit einem zweistelligen Relationszeichen, welches jeweils als strikte Ordnung interpretiert wird?

c) Was ist mit $(\mathbb{Z}, <)$ und $(\mathbb{Q}, <)$ in derselben Sprache?

d) Sei nun $\mathscr{L} = \{+, \cdot, -, c_0, c_1\}$ und $\mathscr{M} = (\mathbb{R}, +_\mathbb{R}, \cdot_\mathbb{R}, -_\mathbb{R}, 0, 1)$ sowie $\mathscr{N} = (\mathbb{Q}, +_\mathbb{Q}, \cdot_\mathbb{Q}, -_\mathbb{Q}, 0, 1)$. Zeigen Sie, dass $\mathscr{M}$ und $\mathscr{N}$ nicht elementar äquivalent sind.

Aufgabe 2 (5 Punkte)**.**

Sei $\mathscr{L} = \{P_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ die Sprache mit abzählbar unendlich vielen Prädikaten (also einstelligen Relationszeichen). Die Prädikate heißen unabhängig in der Struktur $\mathscr{M}$, falls für alle disjunkten, endlichen Teilmengen A und B von $\mathbb{N}$ ein $m \in M$ existiert mit $m \in P_i^{\mathscr{M}}$ für alle i aus A und $m \notin P_j^{\mathscr{M}}$ für alle j aus B.

a) Axiomatisieren Sie die Klasse der Strukturen mit unabhängigen Prädikaten, d.h. geben Sie eine $\mathscr{L}$-Theorie T an, deren Modelle gerade die $\mathscr{L}$-Strukturen $\mathscr{M}$ sind, in denen die Prädikate unabhängig sind.

b) Zeigen Sie mithilfe des Kompaktheitssatzes, dass T konsistent ist.

c) Zeigen Sie, dass T ein abzählbares Modell besitzt.

d) **Bonusfrage** (3 Bonuspunkte) Gegeben Sie ein konkretes (überabzählbares) Modell von T an. Etwas schwerer: Finden Sie auch ein konkretes abzählbares Modell von T?

Für die folgenden Aufgaben schreiben wir $\vdash_\mathscr{L} \theta$ für beliebige $\mathscr{L}$-Formeln θ und meinen damit $\vdash_\mathscr{L} \theta'$ für eine zu θ logisch äquivalente Formel θ', welche keine anderen Junktoren als $\to$ und keine anderen Quantoren als $\forall$ enthält (insbesondere kein $\wedge$, $\vee$ oder $\leftrightarrow$). Wie im Skript nutzen wir $\neg\varphi$ als Abkürzung für $(\varphi \to \bot)$.

Aufgabe 3 (3 Punkte)**.**

Zeigen Sie, dass die folgende $\mathscr{L}$ Formel beweisbar ist, und leiten Sie sie aus dem in der Vorlesung betrachteten Kalkül $\mathbb{K}_\mathscr{L}$ für die Sprache $\mathscr{L}$ ab, wobei φ und ψ beliebige $\mathscr{L}$-Formeln seien.

$$\Big(\forall v_i\,(\varphi \to \psi) \longrightarrow \forall v_i\,(\neg\psi \to \neg\varphi)\Big)$$

(Bitte wenden!)

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.**

In der Sprache $\mathscr{L}$ sei T eine $\mathscr{L}$-Theorie.

a) Zeigen Sie: Wenn es Aussagen $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ gibt mit $T \vdash_{\mathscr{L}} \varphi_i$ für alle i aus $\{1, \ldots, m\}$, so folgt $T \vdash_{\mathscr{L}} \bigwedge_{i=1}^{m} \varphi_i$.

b) Sei nun T deduktiv vollständig und derart, dass T die Aussage $\bigvee_{i=1}^{n} \chi_i$ beweist. Folgern Sie ohne den Vollständigkeitssatz zu benutzen, dass $T \vdash_{\mathscr{L}} \chi_i$ für ein $i \leq n$.

Die Übungsblätter können zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter nach Übungsgruppe entweder im Fach 3.02 oder 3.03 im Keller des mathematischen Instituts.